Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05

Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 6

Ausgabe: 18.11.2004, Abgabe der Lösungen: 25.11.2004, 10:10
Abgabe der Programmieraufgabe: 6.-10.12.2004, genauer Termin nach Vereinbarung.

Aufgabe 21:
Bestimme die Eigenvektoren, die Eigenwerte und die Determinante folgender Matrizen:

$$Q_v = I - 2vv^H \qquad \text{für Vektoren } v \in \mathbb{C}^n \text{ mit } \|v\|_2 = 1$$

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{(Rotation in 2D)}$$

Zeige, dass jede Spiegelung in $\mathbb{R}^2$ an einer Geraden durch den Nullpunkt von der Form

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$ ist. (10 Punkte)

Aufgabe 22:
Sei $v \in \mathbb{C}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$. Zeige die folgenden Eigenschaften der Householder-Reflektionen:
a) $Q_v^H = Q_v$.
b) $Q_v^2 = I$.
c) $Q_v(s + \alpha v) = s - \alpha v$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle Vektoren $s \in \mathbb{C}^n$ mit $s^H v = 0$. Q_v beschreibt also eine Spiegelung an der senkrecht auf v stehenden Hyperebene durch den Nullpunkt.
d) Die Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beschreibe eine Spiegelung, d.h. es gebe einen Unterraum $U \subset \mathbb{C}^n$ mit $\dim_{\mathbb{C}} U = 1$, so dass $Su = -u$ für alle $u \in U$ und $Sx = x$ für alle $x \in U^\perp$. Zeige, dass S eine Householder-Reflektion Q_v ist, die bis auf Skalierung von v mit dem Faktor -1 eindeutig ist.
e) Zeige, dass für jede unitäre Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und jeden Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2.$$

Zeige, dass jede Matrix $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit dieser Eigenschaft unitär ist. Zeige ferner, dass jede unitäre Matrix Q den Bedingungen

$$\|Q\|_{2,2} = 1 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{cond}_2 Q = 1$$

genügt. (10 Punkte)

Aufgabe 23:
Bestimme die QR-Zerlegungen der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{6}{5\sqrt{3}} & \frac{14}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-3}{5} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{9\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} & \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

A mittels Householder-Reflektionen und B mittels Givens-Rotationen. (10 Punkte)

Aufgabe 24:
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^n$ ihre Spaltenvektoren. Zeige die Abschätzung

$$|\det A| \le \prod_{i=1}^n \sqrt{a_i^H a_i}.$$

(10 Punkte)

Programmieraufgabe 2:
Schreibe ein C-, C++- oder Javaprogramm, das die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mittels Householder-Transformationen berechnet. Löse damit die folgenden linearen Gleichungssysteme $Ax = b$:
a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,\ldots,n} \qquad \text{und} \qquad b = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}\right)_{i=1,\ldots,n}$$

für $n = 5, 10, 20, 100$.
Interpretiere die Ergebnisse. Zur Kontrolle: die exakte Lösung für b) ist $x = (1, \ldots, 1)^T$. (10 Punkte)