Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05

Prof. Dr. Karl Scherer, Marcel Arndt

Aufgabenblatt 5

Ausgabe: 11.11.2004, Abgabe der Lösungen: 18.11.2004, 10:10

Aufgabe 17:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

eine Tridiagonalmatrix. Gemäß Vorlesung führt das Gaußverfahren ohne Pivotsuche zu den Koeffizienten

$$\lambda_k = \frac{b_k}{\mu_k}, \qquad \mu_{k+1} = a_{k+1} - \lambda_k c_k.$$

Beweise das folgende Spaltensummenkriterium: Es gelte

$$|a_1| > |b_1| > 0, \qquad |a_n| > |c_{n-1}| > 0 \qquad \text{und} \qquad |a_i| \geq |b_i| + |c_{i-1}|$$

für $i = 2, \ldots, n-1$. Dann ist das o.g. Verfahren durchführbar, und es gilt

$$|\lambda_k| < 1 \qquad \text{und} \qquad |a_{k+1}| - |c_k| < |\mu_{k+1}| < |a_{k+1}| + |c_k|$$

für $k = 1, \ldots, n-1$. Ferner gilt $A = LR$, wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} \mu_1 & c_1 & & & \\ & \mu_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 18:
Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$ definiere folgende Normen:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

a) Zeige:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

b) Skizziere von Hand für alle $p \in \{1, 2, \infty\}$ die Menge

$$B^p := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_p = 1\}.$$

c) Zeige: Für alle $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq q \leq p \leq \infty$ gibt es eine Konstante $c_{p,q,n} \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq c_{p,q,n} \|x\|_p.$$

Bestimme die kleinste Konstante $c_{p,q,n}$ mit dieser Eigenschaft. Finde für beide Ungleichungen einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, für den Gleichheit vorliegt. (10 Punkte)

Aufgabe 19:
a) Zeige dass für jede Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt:

$$\|A\|_{1,1} = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_{\infty,\infty} = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

wobei unter $\|A\|_{p,p}$ die Operatornorm bezüglich der p-Norm gemäß Aufgabe 18 zu verstehen ist. $\|\cdot\|_{1,1}$ wird daher auch Spaltensummennorm und $\|\cdot\|_{\infty,\infty}$ Zeilensummennorm genannt.
b) Die Schurnorm (oft auch Frobeniusnorm genannt) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist definiert durch

$$\|A\|_{\mathrm{S}} := \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Zeige, dass es für $m = n \geq 2$ keine Norm $\|\cdot\|_N$ des $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\|\cdot\|_{\mathrm{S}} = \|\cdot\|_{N,N}$ gilt, d.h. dass die Schurnorm keine Operatornorm ist.
c) Zeige die Submultiplikativität der Schurnorm: Für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ gilt

$$\|AB\|_{\mathrm{S}} \leq \|A\|_{\mathrm{S}} \|B\|_{\mathrm{S}}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 20:
Die symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genüge dem *schwachen Zeilensummenkriterium:* Für alle i gelte

$$a_{ii} \geq \sum_{j:j\neq i} |a_{ij}|,$$

und es gebe ein i_0 mit

$$a_{i_0 i_0} > \sum_{j:j\neq i_0} |a_{i_0 j}|.$$

Ferner sei A irreduzibel, d.h. sind $I_1, I_2 \subset \{1,\dots,n\}$ mit $I_1 \cup I_2 = \{1,\dots,n\}$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $a_{ij} = 0$ für alle $i \in I_1, j \in I_2$, so folgt $I_1 = \emptyset$ oder $I_2 = \emptyset$.
a) Zeige, dass A positiv definit ist.
b) Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass die Voraussetzung der Irreduzibilität für a) erforderlich ist.
c) Zeige, dass die bei der Diskretisierung des negativen Laplaceoperators entstehende Matrix aus der Vorlesung eine Cholesky-Zerlegung besitzt. (10 Punkte)