Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 4

Ausgabe: 4.11.2004, Abgabe der Lösungen: 11.11.2004, 10:10

Aufgabe 13:
Zeige:
a) Sind $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rechte obere Dreiecksmatrizen, dann ist das Produkt R_1R_2 eine rechte obere Dreiecksmatrix. Sind $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ linke untere Dreiecksmatrizen mit normierter Diagonale, so ist das Produkt L_1L_2 eine linke untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale.
b) Ist $R \in GL(n,\mathbb{R})$ eine rechte obere Dreiecksmatrix, dann ist auch R^{-1} eine rechte obere Dreiecksmatrix. Ist $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine linke untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale, dann ist $L \in GL(n,\mathbb{R})$, und L^{-1} ist eine linke untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale. (10 Punkte)

Aufgabe 14:
a) Zeige, dass die LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eindeutig ist, soweit sie existiert. Gilt dies auch, falls A singulär ist?
b) Finde eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, die keine LR-Zerlegung besitzt.
c) Ist die Zerlegung $LR = PA$ aus der Vorlesung einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eindeutig? (Beweis bzw. Gegenbeispiel) (10 Punkte)

Aufgabe 15:
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die beim Gaußverfahren ohne Pivotisierung entstehenden Restmatrizen $(A_{ij}^{(k)})_{i,j=k+1,\dots,n}$ symmetrisch positiv definit sind, falls die ursprüngliche Matrix $A = A^{(0)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit ist.
a) Zeige, dass in diesem Fall ferner gilt:

$$A_{ii}^{(k)} \geq A_{ii}^{(k+1)} > 0 \qquad \forall i = 1,\dots,n, \quad \forall k = 0,\dots,n-2.$$

b) Zeige, dass $A^{(0)}$ mit $A_{11}^{(0)} > 0$ genau dann positiv definit ist, wenn die Matrix $(A_{ij}^{(1)})_{i,j=2,\dots,n}$ positiv definit ist. Gilt diese Äquivalenz auch für symmetrische positive Definitheit? (Beweis bzw. Gegenbeispiel) (10 Punkte)

Aufgabe 16:
a) Eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst *Bandmatrix* mit der *Bandbreite* $2m+1$, falls gilt:

$$|i-j| > m \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} = 0.$$

Zeige, dass die LR-Zerlegung die Bandstruktur erhält, d.h. ist A eine Bandmatrix mit Bandbreite $2m+1$, so auch L und R.
b) Bei der Diskretisierung von Differentialoperatoren treten oft Matrizen auf, bei denen bis auf die Hauptdiagonale und wenige Nebendiagonalen alle Einträge verschwinden, also Matrizen mit

$$|i-j| \notin I \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} = 0,$$

wobei $I \subset \mathbb{N}$ die Diagonalen mit nichtverschwindenden Einträgen indiziert. Man nehme $I \neq \{0,1,\dots,m\}$ an, so dass sich diese Matrizen von den oben beschriebenen Bandmatrizen unterscheiden. Bleibt diese Struktur bei der LR-Zerlegung erhalten? (10 Punkte)