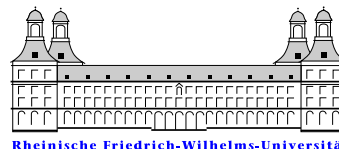




Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Marcel Arndt



Aufgabenblatt 4

Ausgabe: 4.11.2004, Abgabe der Lösungen: 11.11.2004, 10:10

Aufgabe 13:

Zeige:

- Sind $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rechte obere Dreiecksmatrizen, dann ist das Produkt $R_1 R_2$ eine rechte obere Dreiecksmatrix. Sind $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ linke untere Dreiecksmatrizen mit normierter Diagonale, so ist das Produkt $L_1 L_2$ eine linke untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale.
- Ist $R \in GL(n, \mathbb{R})$ eine rechte obere Dreiecksmatrix, dann ist auch R^{-1} eine rechte obere Dreiecksmatrix. Ist $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine linke untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale, dann ist $L \in GL(n, \mathbb{R})$, und L^{-1} ist eine linke untere Dreiecksmatrix mit normierter Diagonale. (10 Punkte)

Aufgabe 14:

- Zeige, dass die LR -Zerlegung einer Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eindeutig ist, soweit sie existiert. Gilt dies auch, falls A singular ist?
- Finde eine Matrix $A \in GL(2, \mathbb{R})$, die keine LR -Zerlegung besitzt.
- Ist die Zerlegung $LR = PA$ aus der Vorlesung einer Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ eindeutig? (Beweis bzw. Gegenbeispiel) (10 Punkte)

Aufgabe 15:

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die beim Gaußverfahren ohne Pivotisierung entstehenden Restmatrizen $(A_{ij}^{(k)})_{i,j=k+1,\dots,n}$ symmetrisch positiv definit sind, falls die ursprüngliche Matrix $A = A^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit ist.

- Zeige, dass in diesem Fall ferner gilt:

$$A_{ii}^{(k)} \geq A_{ii}^{(k+1)} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall k = 0, \dots, n-2.$$

- Zeige, dass $A^{(0)}$ mit $A_{11}^{(0)} > 0$ genau dann positiv definit ist, wenn die Matrix $(A_{ij}^{(1)})_{i,j=2,\dots,n}$ positiv definit ist. Gilt diese Äquivalenz auch für symmetrische positive Definitheit? (Beweis bzw. Gegenbeispiel) (10 Punkte)

Aufgabe 16:

- Eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst *Bandmatrix* mit der *Bandbreite* $2m + 1$, falls gilt:

$$|i - j| > m \implies a_{ij} = 0.$$

Zeige, dass die LR -Zerlegung die Bandstruktur erhält, d.h. ist A eine Bandmatrix mit Bandbreite $2m + 1$, so auch L und R .

- Bei der Diskretisierung von Differentialoperatoren treten oft Matrizen auf, bei denen bis auf die Hauptdiagonale und wenige Nebendiagonalen alle Einträge verschwinden, also Matrizen mit

$$|i - j| \notin I \implies a_{ij} = 0,$$

wobei $I \subset \mathbb{N}$ die Diagonalen mit nichtverschwindenden Einträgen indiziert. Man nehme $I \neq \{0, 1, \dots, m\}$ an, so dass sich diese Matrizen von den oben beschriebenen Bandmatrizen unterscheiden. Bleibt diese Struktur bei der LR -Zerlegung erhalten? (10 Punkte)