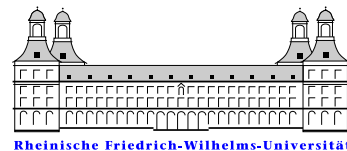




Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Marcel Arndt



Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 3

Ausgabe: 28.10.2004, Abgabe der Lösungen: 4.11.2004, 10:10

Aufgabe 9:

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär ist, falls das Gaußverfahren mit Totalpivotisierung durchführbar ist. Zeige, dass dieses Verfahren genau dann im k -ten Schritt abbricht, wenn

$$\text{rang } A = k - 1$$

ist. Zeige ferner, dass das Gaußverfahren mit Totalpivotisierung immer durchführbar ist, falls A regulär ist. (10 Punkte)

Aufgabe 10:

Bei der Gauß-Elimination ohne Pivotsuche wird zunächst die LR -Zerlegung $A = LR$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie die entsprechende Modifikation $c = L^{-1}b$ der rechten Seite $b \in \mathbb{R}^n$ bestimmt. In programmnaher Schreibweise lautet dies:

```
for k = 1, ..., n - 1
  if akk = 0 then
    stop
  else
    for i = k + 1, ..., n
      aik ← aik/akk
      bi ← bi - aikbk
      for j = k + 1, ..., n
        aij ← aij - aikakj
      end
    end
  end
end
end
```

Hierbei wird das Ergebnis in der ursprünglichen Matrix A bzw. im ursprünglichen Vektor b abgespeichert.¹ Bestimme die Anzahl der Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen, die zur Durchführung notwendig sind. (Hierbei werden die Laufindices der Schleifen nicht mitgerechnet.)

b) Zum Abschluss des Gauß-Verfahrens wird eine Rückwärtssubstitution zur Lösung des entstehenden Gleichungssystems $Rx = c$ durchgeführt. Schreibe die Rückwärtssubstitution in programmnaher Schreibweise und bestimme wie oben die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen. (10 Punkte)

Aufgabe 11:

Für $l \neq k$ bezeichne $N_{lk}(\alpha)$ die Matrix, die von der $n \times n$ -Einheitsmatrix nur durch den Eintrag α an der lk -ten Stelle abweicht. Beweise das folgende Lemma der Vorlesung:

a) Für festes k sind die $N_{lk}(\alpha_l)$ kommutativ, d.h.

$$N_{lk}(\alpha_l)N_{\bar{l}k}(\alpha_{\bar{l}}) = N_{\bar{l}k}(\alpha_{\bar{l}})N_{lk}(\alpha_l).$$

Ferner sind das Produkt F_k aller $N_{lk}(\alpha_l)$ sowie ihr Inverses von der Form

$$F_k := \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n N_{lk}(\alpha_l) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad F_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & -\alpha_1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & -\alpha_n & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

¹Die Matrix L wird zur weiteren Durchführung des Gauß-Algorithmus nicht benötigt, wird hier aber dennoch abgespeichert, da sie für andere Zwecke oft hilfreich ist.

Die F_k heißen *Frobenius-Matrizen*.

b) Für die linken unteren Dreiecksmatrizen

$$L_k := \prod_{i=k+1}^n N_{ik}(l_{ik})$$

gilt

$$L_1 L_2 \cdots L_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 12:

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -4 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die LR -Zerlegung der Matrix A , d.h. finde eine linke untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit normierter Diagonale und eine rechte obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, so dass $A = LR$ ist.

b) Löse mittels Vorwärts- und Rückwärtssubstitution das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. (10 Punkte)