Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Marcel Arndt

Aufgabenblatt 3

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Ausgabe: 28.10.2004, Abgabe der Lösungen: 4.11.2004, 10:10

Aufgabe 9:
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär ist, falls das Gaußverfahren mit Totalpivotisierung durchführbar ist. Zeige, dass dieses Verfahren genau dann im k-ten Schritt abbricht, wenn

$$\operatorname{rang} A = k-1$$

ist. Zeige ferner, dass das Gaußverfahren mit Totalpivotisierung immer durchführbar ist, falls A regulär ist.
(10 Punkte)

Aufgabe 10:
Bei der Gauß-Elimination ohne Pivotsuche wird zunächst die LR-Zerlegung $A = LR$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie die entsprechende Modifikation $c = L^{-1}b$ der rechten Seite $b \in \mathbb{R}^n$ bestimmt. In programmnaher Schreibweise lautet dies:

```
for k = 1, ..., n-1
      if a_kk = 0 then
            stop
      else
            for i = k+1, ..., n
                  a_ik ← a_ik / a_kk
                  b_i ← b_i - a_ik b_k
                  for j = k+1, ..., n
                        a_ij ← a_ij - a_ik a_kj
                  end
            end
      end
end
```

Hierbei wird das Ergebnis in der ursprünglichen Matrix A bzw. im ursprünglichen Vektor b abgespeichert.[1] Bestimme die Anzahl der Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen, die zur Durchführung notwendig sind. (Hierbei werden die Laufindices der Schleifen nicht mitgerechnet.)
b) Zum Abschluss des Gauß-Verfahrens wird eine Rückwärtssubstitution zur Lösung des entstehenden Gleichungssystems $Rx = c$ durchgeführt. Schreibe die Rückwärtssubstitution in programmnaher Schreibweise und bestimme wie oben die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen. (10 Punkte)

Aufgabe 11:
Für $l \neq k$ bezeichne $N_{lk}(\alpha)$ die Matrix, die von der $n\times n$-Einheitsmatrix nur durch den Eintrag α an der lk-ten Stelle abweicht. Beweise das folgende Lemma der Vorlesung:
a) Für festes k sind die $N_{lk}(\alpha_l)$ kommutativ, d.h.

$$N_{lk}(\alpha_l)N_{\tilde{l}k}(\alpha_{\tilde{l}}) = N_{\tilde{l}k}(\alpha_{\tilde{l}})N_{lk}(\alpha_l).$$

Ferner sind das Produkt F_k aller $N_{lk}(\alpha_l)$ sowie ihr Inverses von der Form

$$F_k := \prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} N_{lk}(\alpha_l) = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \alpha_n & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad F_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -\alpha_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -\alpha_n & & 1 \end{pmatrix}.$$

[1] Die Matrix L wird zur weiteren Durchführung des Gauß-Algorithmus nicht benötigt, wird hier aber dennoch abgespeichert, da sie für andere Zwecke oft hilfreich ist.

Die F_k heißen *Frobenius-Matrizen*.
b) Für die linken unteren Dreiecksmatrizen

$$L_k := \prod_{i=k+1}^{n} N_{ik}(l_{ik})$$

gilt

$$L_1 L_2 \cdots L_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 Punkte)}$$

Aufgabe 12:
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -4 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die LR-Zerlegung der Matrix A, d.h. finde eine linke untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit normierter Diagonale und eine rechte obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass $A = LR$ ist.
b) Löse mittels Vorwärts- und Rückwärtssubstitution das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. (10 Punkte)