Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 1

Ausgabe: 14.10.2004, Abgabe der Lösungen: 21.10.2004, 10:10

Aufgabe 1:
a) Seien U, V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_U$, $\|\cdot\|_V$ bzw. $\|\cdot\|_W$, und seien $A : U \to V$ und $B : V \to W$ Homomorphismen. Zeige die Submultiplikativität der zugehörigen Operatornormen:

$$\|B \circ A\|_{U,W} \leq \|B\|_{V,W}\|A\|_{U,V}.$$

Hierbei bezeichnet $\circ$ wie üblich die Komposition von Abbildungen. (5 Punkte)
b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. Zeige, dass die Kondition $\mathrm{cond}(A)$ der Lösung des linearen Gleichungssystems $x \mapsto A^{-1}x$ für $x \in \mathbb{R}^n$ immer größer oder gleich 1 ist. (5 Punkte)

Aufgabe 2:
Berechne die Operatornormen

$$A = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right\|_{1,1}, \qquad A = \left\|\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\|_{2,2}, \qquad A = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right\|_{\infty,\infty},$$

wobei die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ wie in der Vorlesung definiert sind. (je 3 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$.
a) Berechne die Konditionszahlen der Berechnung der Koeffizienten $p(a,b,c) = -a^2 - b^2 - c^2$ und $q(a,b,c) = -2abc$ des charakteristischen Polynoms $\chi_A(x) = x^3 + p(a,b,c)x + q(a,b,c)$ von A. Ist das ein gut oder ein schlecht konditioniertes Problem?
b) Zeige, dass die Berechnung der Eigenwerte $\lambda_i(p,q)$ von A mittels der Nullstellen von χ_A schlecht konditioniert ist.
Hinweis: Berechne $\frac{\partial\lambda_i}{\partial p}$ bzw. $\frac{\partial\lambda_i}{\partial q}$ implizit. (10 Punkte)

Aufgabe 4:
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrizen.
a) Bestimme, wieviele elementare Additionen und wieviele Multiplikationen reeller Zahlen zur Berechnung des Produkts $C := AB$ mit der gewöhnlichen Summenformel notwendig sind. Eine elementare Rechenoperation koste die Zeit 1. Drücke die benötigte Zeit für die Matrixmultiplikation mit Hilfe der Landausymbole aus.
b) Sei nun n eine Zweierpotenz, also $n = 2^m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Strassen schlug folgendes Verfahren[1] vor: Zerlege A und B in jeweils vier $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Berechne die sieben Hilfsprodukte

$$\begin{aligned} P_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) & P_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\ P_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} & P_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\ P_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) & P_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}). \\ P_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) & & \end{aligned}$$

[1] V. Strassen, *Gaussian elimination is not optimal,* Numerische Mathematik, 13:354–356 (1969).

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 + P_4 - P_5 + P_7 & P_3 + P_5 \\ P_2 + P_4 & P_1 + P_3 - P_2 + P_6 \end{pmatrix}.$$

Damit reduziert sich die Zahl der Multiplikationen kleinerer Matrizen von acht auf sieben gegenüber dem naiven Verfahren, während die Zahl der Additionen gestiegen ist[2]. Dieses Verfahren wird nun rekursiv zur Berechnung der sieben kleineren Produkte angewandt.
Zeige, dass die benötige Zeit $T(n)$ für die Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen der Rekurrenzrelation

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2}n^2, \qquad T(1) = 1$$

genügt. Folgere daraus, dass die Matrixmultiplikation nach Strassen die Komplexität $\mathcal{O}(n^{\log_2 7}) \approx \mathcal{O}(n^{2.807})$ besitzt.
c) Zeige, dass $\mathcal{O}(n^2)$ eine untere Schranke für die Komplexität der Matrixmultiplikation ist. (15 Punkte)

Bemerkung: Der derzeit beste bekannte Algorithmus zur Matrixmultiplikation stammt von D. Coppersmith und S. Winograd[3] aus dem Jahr 1990 und besitzt die Komplexität $\mathcal{O}(n^{2.376})$.

Die Aufgabenblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung stehen auch unter
`http://wissrech.ins.uni-bonn.de/lehre/prama1_ws04`
zur Verfügung.

---

[2] Es gibt eine Variante von Winograd, die nur 15 statt 18 Additionen benötigt.
[3] D. Coppersmith, S. Winograd, *Matrix Multiplication via Arithmetic Progressions,* Journal of Symbolic Computation, 9:251–280 (1990).