Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Aufgabenblatt 13

Ausgabe: 30.1.2003, Abgabe der Lösungen: 6.2.2003, 10:30

Aufgabe 54:
Das Interpolationspolynom $P \in \mathcal{P}_n$ zu gegebenen paarweise verschiedenen Stützstellen $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n)^T$ und Funktionswerten $\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_n)^T$ kann auf verschiedene Arten dargestellt werden:

Potenzform: $$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^P x^j$$

Lagrange–Form: $$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^L \ell_{jn}(x) \qquad \text{mit} \quad \ell_{jn} = \prod_{\substack{k=0,\ldots,n \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

Newton–Form: $$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^N \omega_j(x) \qquad \text{mit} \quad \omega_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k)$$

a) Offenbar ist die Zuordnung der Funktionswerte zu den Koeffizienten bei festen Stützstellen linear. Bestimme die zugehörigen Matrizen $M^P, M^L, M^N \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, also die Matrizen mit $M^P \mathbf{f} = \mathbf{a}^P$, $M^L \mathbf{f} = \mathbf{a}^L$ und $M^N \mathbf{f} = \mathbf{a}^N$. Die Bestimmung der Koeffizienten entspricht der Invertierung dieser Matrizen. Welcher Aufwand dafür ergibt sich durch die Struktur der Matrizen?
b) Bestimme zu $\mathbf{x} = (0, 2, 3)^T$ und $\mathbf{f} = (2, 3, 8)^T$ alle drei Darstellungen des Interpolationspolynoms, die letzte mit Hilfe des Rekursionsschemas der dividierten Differenzen. (10 Punkte)

Aufgabe 55:
Sei $P \in \mathcal{P}_3$ das Interpolationspolynom mit $P(x_i) = f_i$, wobei

x_i	-1	0	1	3
f_i	5	-6	-9	33

Berechne mit Hilfe der Rekursionsformel von Aitken (Lemma 8.3.13 der Vorlesung) den Wert $P(2)$.
(8 Punkte)

Aufgabe 56:
Es seien paarweise verschiedene Stützstellen $x_i \in \mathbb{R}$ und Funktionswerte $f(x_i) \in \mathbb{R}$ für $i = 0, \ldots, n$ gegeben.
Zeige:
a) Für jede Permutation $\sigma \in S_{n+1}$ gilt

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]f = [x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]f,$$

d.h. daß die dividierten Differenzen unabhängig von der Reihenfolge der Stützstellen sind.
b)

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=0,\ldots,n \\ i \neq j}} (x_j - x_i)}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 57:
Bei der Analyse der Approximationseigenschaften interpolierender Polynome spielen die Tschebyscheff–Polynome eine wichtige Rolle, vgl. Vorlesung. Sie sind rekursiv durch $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ und

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \qquad \text{für } k \geq 2$$

definiert.
a) Berechne und skizziere $T_0, T_1, \ldots, T_4$.
b) Zeige, daß auf dem Intervall $[-1, 1]$ gilt:

$$T_k(x) = \cos(k(\arccos x)).$$

c) Zeige, daß (bei Verwendung einer komplexwertigen Wurzelfunktion) auf $\mathbb{R}$ gilt:

$$T_k(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^k + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^k\right).$$

d) Zeige, daß die Tschebyscheff–Polynome auf $\mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$(1-x^2)T_k''(x) - xT_k'(x) + k^2T_k(x) = 0$$

genügen.
e) Zeige, daß die Tschebyscheff–Polynome der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x)T_l(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } k = l \neq 0 \\ \pi & \text{für } k = l = 0 \end{cases}$$

genügen. (15 Punkte)

Informationen zur Klausur:

Hauptklausur:	8.2.2003, 9:00 s.t. im Wolfgang–Paul–Hörsaal der Physik, Kreuzbergweg
Nachklausur:	26.2.2003, 9:00 s.t. im Kleinen Hörsaal der Mathematik, Wegelerstr. 10
Bearbeitungsdauer:	jeweils 180 Minuten
Mitzubringen sind:	Stifte, leeres DIN A4–Papier, Studentenausweis und Personalausweis

Sonstige Hilfsmittel sind nicht zugelassen.