Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Aufgabenblatt 12

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Ausgabe: 23.1.2003, Abgabe der Lösungen: 30.1.2003, 10:30

Aufgabe 50:
Sei $f \in C^{2,1}(\mathbb{R})$, d.h. $f \in C^2(\mathbb{R})$ und f'' Lipschitz-stetig. Sei $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Konstruiere ein Fixpunktverfahren, das lokal von dritter Ordnung gegen x^* konvergiert.
Hinweis: Nutze den Ansatz

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - g(x)f(x)^2.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 51:
Sei $f \in C^0([a_0, b_0])$ mit $a_0 < b_0$, $f(a_0) < 0$ und $f(b_0) > 0$. Mit Hilfe der *Regula Falsi* werde eine Nullstelle von f bestimmt:

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}, \qquad [a_{i+1}, b_{i+1}] = \begin{cases} [a_i, x_i] & \text{falls } f(x_i) \geq 0 \\ [x_i, b_i] & \text{falls } f(x_i) < 0. \end{cases}$$

a) Zeige, daß die Grenzwerte $a := \lim_{i\to\infty} a_i$, $b := \lim_{i\to\infty} b_i$ und $x := \lim_{i\to\infty} x_i$ existieren. Zeige $f(x) = 0$. Zeige, daß $x = a$ oder $x = b$ ist, mindestens eine der beiden Folgen $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ also gegen eine Nullstelle von f konvergiert. Konstruiere eine Funktion f, für die $f(b) > 0$ ist, $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ also nicht gegen eine Nullstelle konvergiert. (Das Trivialbeispiel einer linearen Funktion ist wegen $f(a_i) < 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ automatisch ausgeschlossen!)
b) Nun sei $x^* \in (a_0, b_0)$ die einzige Nullstelle von f, außerdem sei f in x^* differenzierbar mit $f'(x^*) > 0$. Zeige, daß das Verfahren linear im Sinn von

$$\exists c < 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}: \quad |x_i - x^*| \leq \begin{cases} c|b_i - x^*| & \text{falls } f(x_i) \geq 0 \\ c|a_i - x^*| & \text{falls } f(x_i) < 0 \end{cases}$$

konvergiert.
c) Zeige, daß das Verfahren im Fall $f'(x^*) = 0$ nicht notwendigerweise linear konvergiert. (15 Punkte)

Aufgabe 52:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 + y^3 - 4 \\ x^3 - y^3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Iterationsfunktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ des Newtonverfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle von f. Zeige, daß das Newtonverfahren für alle Startvektoren $(x_0, y_0)^T \in [1, 2]^2$ konvergiert. Führe zwei Schritte zum Startvektor $(x_0, y_0)^T = (1, 1)^T$ durch. (10 Punkte)

Aufgabe 53:
Zu gegebenen Stützstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ bezeichne ℓ_{jn} das Lagrange-Fundamentalpolynom vom Grad n mit $\ell_{jn}(x_i) = \delta_{ij}$. Außerdem sei

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

a) Zeige

$$\ell_{jn}(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}.$$

b) Bestimme explizit ℓ_{02}, ℓ_{12} und ℓ_{22} für $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Bestimme damit das Lagrange-Interpolationspolynom $p(x)$ mit $p(x_j) = y_j$ zu $y_0 = 2$, $y_1 = 3$ und $y_3 = 1$. (10 Punkte)