Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Aufgabenblatt 11

Ausgabe: 16.1.2003,   Abgabe der Lösungen: 23.1.2003, 10:30

Aufgabe 45:
a) Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f(0) \le 0$, $f'(0) > 0$ und f' monoton wachsend. Zeige, daß f genau eine Nullstelle x^* besitzt und das Newtonverfahren zu jedem Startwert $x_0 \ge 0$ gegen x^* konvergiert.
b) Konstruiere ein quadratisch konvergentes Iterationsverfahren zur Bestimmung der Wurzel $\sqrt[p]{q}$ für $p > 1$, $q > 0$. (10 Punkte)

Aufgabe 46:
a) Zeige, daß die Funktion

$$g(x) = \arctan x - 2\frac{x}{1+x^2}$$

genau eine positive Nullstelle r besitzt.
b) Zeige, daß das Newtonverfahren zu der Funktion

$$f(x) = \arctan x$$

mit dem Startwert x_0 genau dann konvergiert, wenn

$$|x_0| < r.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 47:
Sei

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = \big((x - e^k)^T (x - e^k) - 1\big)_{k=1,\dots,n}$$

die Funktion der Programmieraufgabe 5, wobei e^k den k–ten Einheitsvektor bezeichnet.
a) Zeige:

$$\operatorname{rang} Df(x) = \begin{cases} n-1 & \text{falls } \sum_k x_k = 1 \\ n & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Bestimme die Nullstellen von f. Zeige, daß die Vielfachheit der Nullstellen 1 ist. (10 Punkte)

Aufgabe 48:
Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$, und sei $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \ne 0$. Zu gegebenen Startwerten $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ werde die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mittels des *Sekantenverfahrens* gebildet:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

a) Zeige, daß es ein $\xi \in (\min(x^*, x_k, x_{k-1}), \max(x^*, x_k, x_{k-1}))$ gibt mit

$$f(x_k) + (x^* - x_k)\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{2}(x^* - x_{k-1})(x^* - x_k)f''(\xi) = 0.$$

b) Zeige, daß es eine Konstante C gibt, so daß

$$|x_{k+1} - x^*| \le C|x_k - x^*||x_{k-1} - x^*|,$$

falls x_k und x_{k-1} genügend nahe bei x^* liegen.
c) Zeige, daß das Sekantenverfahren lokal mit der Konvergenzordnung $(1+\sqrt{5})/2$ konvergiert.
Hinweis: Fibonacci-Folge. (15 Punkte)

Aufgabe 49:
Oft tritt das Problem auf, ein Polynom p und seine Ableitungen an einer festen Stelle x auszuwerten, so z.B. bei iterativen Verfahren zur Nullstellenbestimmung von Polynomen. Dies geschieht effizient durch Verwendung des *Hornerschemas*

$$p(\xi) = a_0 + a_1\xi + \ldots + a_{n-1}\xi^{n-1} + a_n\xi^n = a_0 + \xi(a_1 + \xi(a_2 + \ldots + \xi(a_{n-1} + \xi a_n))),$$

d.h. es werden sukzessive

$$a_n^{(0)} := a_n, \qquad a_j^{(0)} := a_j + x a_{j+1}^{(0)} \quad \text{für } j = n-1, \ldots, 0$$

berechnet. Dann gilt $p(x) = a_0^{(0)}$. Durch Koeffizientenvergleich erkennt man leicht

$$p(\xi) = a_0^{(0)} + (\xi - x)\left(a_1^{(0)} + a_2^{(0)}\xi + \ldots + a_n^{(0)}\xi^{n-1}\right).$$

Beim *erweiterten Hornerschema* wird das einfache Hornerschema iterativ auf das Restpolynom $a_1^{(0)} + a_2^{(0)}\xi + \ldots + a_n^{(0)}\xi^{n-1}$ angewandt:

$$a_n^{(i)} := a_n^{(i-1)}, \qquad a_j^{(i)} := a_j^{(i-1)} + x a_{j+1}^{(i)} \quad \text{für } j = n-1, \ldots, i.$$

Man erhält somit die Entwicklung von p um x:

$$p(\xi) = a_0^{(0)} + a_1^{(1)}(\xi - x) + \ldots + a_n^{(n)}(\xi - x)^n,$$

und die Ableitungen von p in x sind gegeben durch

$$p^{(j)}(x) = j!\, a_j^{(j)}.$$

a) Bestimme mit dem erweiterten Hornerschema die Entwicklung des Polynoms

$$p(\xi) = 120 - 210\xi + 150\xi^2 - 59\xi^3 + 12\xi^4 - \xi^5$$

um $x = 2$. Stelle alle im Schema auftretenden Koeffizienten $a_j^{(i)}$ tabellenförmig dar. Bestimme die Ableitungen $p^{(j)}(2)$.
b) Bestimme mit dem erweiterten Hornerschema die Entwicklung des Polynoms

$$p(\xi) = -51 - 76(\xi - 3) - 21(\xi - 3)^2 - 2(\xi - 3)^3$$

um $x = 0$. Stelle alle im Schema auftretenden Koeffizienten $a_j^{(i)}$ tabellenförmig dar. Bestimme die Ableitungen $p^{(j)}(0)$. (10 Punkte)

Korrektur zur Programmieraufgabe 5 auf Blatt 10:
Die Funktion f lautet

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = \left((x - e^i)^T(x - e^i) - 1\right)_{i=1,\ldots,n}$$