Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 10

Ausgabe: 9.1.2003, Abgabe der Lösungen: 16.1.2003, 10:30
Abgabe der Programmieraufgaben: 20.-24.1.2003, genauer Termin nach Vereinbarung.

Aufgabe 41:
Beweise den *Banachschen Fixpunktsatz*:
Sei X ein Banachraum, und sei $E \subset X$ abgeschlossen. Die Abbildung $\Phi : E \to E$ sei eine Kontraktion, d.h. es gebe eine Konstante $L < 1$, so daß für alle $x, y \in E$ gilt:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \le L\|x - y\|.$$

Dann gilt:
a) Φ hat genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $x^* \in E$ mit $\Phi(x^*) = x^*$.
b) Zu jedem Startwert $x_0 \in E$ konvergiert die rekursiv durch

$$x_{k+1} := \Phi(x_k)$$

definierte Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den Fixpunkt x^*.
c) Es gilt die *a priori*–Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \le \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

d) Es gilt die *a posteriori*–Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \le \frac{L}{1-L}\|x_k - x_{k-1}\|.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 42:
a) Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ konvex, seien $\|\cdot\|_n$ und $\|\cdot\|_m$ beliebige Normen des $\mathbb{R}^n$ bzw. R^m. Zeige, daß für jede differenzierbare Abbildung $\Phi : E \to \mathbb{R}^m$ und alle $x, y \in E$ gilt:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_m \le \sup_{z\in E} \|\Phi'(z)\|_{n\to m}\|x - y\|_n$$

b) Finde ein Gegenbeispiel zu a), falls E zusammenhängend, aber nicht konvex ist.
c) Zeige, daß das System

$$\cos x - 6x + 2y = 0$$
$$\sin x + xy^2 - 8y = 0$$

auf $[0, 1]^2$ eine eindeutige Lösung besitzt. (15 Punkte)

Aufgabe 43:
a) Formuliere die Integralgleichung

$$f(x) = \cos x + \int_0^1 \sin\left(\frac{xt\pi}{6}\right) f(t)\mathrm{d}t.$$

als Fixpunktgleichung $\Phi : C([0, 1]) \to C([0, 1])$, die bezüglich der Maximumsnorm $\|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ eine Kontraktionskonstante $L \le 0.256$ besitzt.
b) Zeige, daß die Integralgleichung genau eine Lösung $f^* \in C([0, 1])$ besitzt.
c) Als Startwert der Fixpunktiteration $f_{k+1} := \Phi(f_k)$ werde $f_0 = 0$ verwendet. Wieviele Iterationen K sind notwendig, so daß $\|f_K - f^*\|_\infty \le 10^{-9}$ gilt? (10 Punkte)

Aufgabe 44:
Die Funktion $f \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ mit $m \in \mathbb{N}$ habe in $x^* \in \mathbb{R}$ eine m–fache Nullstelle, d.h. $f^{(i)}(x^*) = 0$ für alle $i = 0, 1, \ldots, m-1$ und $f^{(m)}(x^*) \neq 0$. Weiterhin gebe es eine Umgebung U von x, so daß $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in U \setminus \{x^*\}$ ist. Zeige, daß das modifizierte Newtonverfahren

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

lokal quadratisch gegen x^* konvergiert. (10 Punkte)

Programmieraufgabe 5:
a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei gegeben durch

$$f(x) = \big((x - e^i)^T(x - e^i) - 1\big)_{i=1,\ldots,n}$$

wobei e^i den i–ten Einheitsvektor bezeichnet. Schreibe zwei MatLab–Funktionen (Hilfe dazu: `doc function` in MatLab eingeben), die $f(x)$ und $f'(x)$ zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ berechnen.
b) Das Newtonverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der multivariaten Funktion f lautet

$$x_{k+1} := x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k).$$

Schreibe ein MatLab–Programm, das zu einem gegebenen Startwert x_0 das Newtonverfahren durchführt. Nutze dazu die beiden Funktionen aus a). Teste es anhand der Startwerte

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 10^{10} \\ 10^{10} \\ \vdots \\ 10^{10} \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_0 = 2e^1.$$

Gib in jedem Schritt x_k und $f(x_k)$ aus und bestätige anhand der Ergebnisse, daß die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ lokal quadratisch konvergiert. (10 Punkte)

Anleitungen zu MatLab:

- Integriertes Hilfesystem von MatLab
- `http://sun.uni-regensburg.de/matlab-5.3.1/html/script/mscript.html`
- `http://www.tu-harburg.de/rzt/tuinfo/software/numsoft/matlab/kurse/einf_dtm`
- `http://www.rrz.uni-hamburg.de/RRZ/W.Wiedl/Skripte/Matlab`
- `http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs4`