Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03

Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 9

Ausgabe: 19.12.2002, Abgabe der Lösungen: 9.1.2003, 10:30

Aufgabe 37:
Zeige, daß jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine *komplexe Schurfaktorisierung*

$$Q^*AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: R$$

mit einer unitären Matrix $Q \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ und einer rechten oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ besitzt. Zeige, daß die Diagonaleinträge λ_i von R die Eigenwerte von A sind.
Hinweis: Transformation auf Jordan-Normalform. Nutze, daß man (wie bei der QR–Zerlegung im Reellen) im Komplexen jede Matrix in das Produkt aus einer unitären Matrix und einer rechten oberen Dreiecksmatrix zerlegen kann. (10 Punkte)

Aufgabe 38:
Bestimme eine reelle und eine komplexe Schurfaktorisierung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 39:
Zur Berechnung der Eigenwerte einer (nicht notwendigerweise symmetrischen) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bringt man A oft durch Ähnlichkeitstransformation mit einer Matrix $Q \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ auf Hessenberggestalt

$$QAQ^T = \begin{pmatrix} h_{11} & \ldots\ldots\ldots & & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_{nn-1} & h_{nn} \end{pmatrix} =: H,$$

also auf eine Matrix H mit $h_{ij} = 0$ für $i \geq j+2$. H heißt *zerfallend*, falls es ein i mit $h_{i,i-1} = 0$ gibt.
a) Zeige, daß jede nicht zerfallende Hessenbergmatrix ähnlich zu einer Hessenbergmatrix ist, deren linke untere Nebendiagonale nur Einsen enthält.
b) Zeige, daß jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ einer nicht zerfallenden Hessenbergmatrix die geometrische Vielfachheit 1 besitzt, d.h. $\dim \operatorname{kern}(A - \lambda I) = 1$.
c) Zeige, daß alle Eigenwerte einer nicht zerfallenden symmetrischen Tridiagonalmatrix (wie z.B. die der Programmieraufgabe 4) die algebraische und geometrische Vielfachheit 1 haben. (15 Punkte)

Aufgabe 40:
Betrachte das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$Ax - \lambda Bx = 0,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit ist.
a) Forme das verallgemeinerte Eigenwertproblem mittels der Choleskyzerlegung $B = LL^T$ in ein gewöhnliches Eigenwertproblem

$$My - \lambda y = 0$$

um.
b) Die inverse Vektoriteration zur Matrix M lautet (zur Vereinfachung ohne Normierung)

$$(M - \mu I)y^{(k)} = y^{(k-1)}, \qquad \lambda^{(k)} = \frac{y^{(k-1)} \cdot y^{(k-1)}}{y^{(k)} \cdot y^{(k-1)}} + \mu.$$

Kontruiere ein Iterationsverfahren, das bis auf eine Koordinatentransformation die gleiche Folge von Vektoren liefert, ohne die explizite Choleskyzerlegung von B auskommt und nur die Matrizen A und B verwendet.
c) Bei welchen der beiden Verfahren aus b) ist die Iterationsmatrix symmetrisch, falls A symmetrisch ist?

(10 Punkte)

Frohe Weihnachten!