Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03

Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 8

Ausgabe: 12.12.2002, Abgabe der Lösungen: 19.12.2002, 10:30
Abgabe der Programmieraufgaben: 7.-10.1.2003, genauer Termin nach Vereinbarung.

Aufgabe 33:
Berechne durch Abschätzung der Eigenwerte mit Hilfe von Gerschgorinkreisen eine obere Schranke für die Kondition $\kappa_2(A)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(8 Punkte)

Aufgabe 34:
Zur Bestimmung eines Eigenwertes einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in der Nähe eines Schätzwertes $\mu \in \mathbb{R}$ verwendet man die inverse Vektoriteration

$$(A - \mu I)\tilde{y}^{(k+1)} = y^{(k)}, \qquad y^{(k+1)} = \frac{\tilde{y}^{(k+1)}}{\|\tilde{y}^{(k+1)}\|_2}.$$

Bestimme eine Korrektur δ für μ so, daß

$$r(\delta) := (A - (\mu + \delta)I)\tilde{y}^{(k+1)} = y^{(k)} - \delta\tilde{y}^{(k+1)}$$

minimal in der Euklidischen Norm ist. (8 Punkte)

Aufgabe 35:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & \star & \star & \star & \star \\ \star & 4 & \star & \star & \star \\ \star & \star & -5 & \star & \star \\ \star & \star & \star & 0 & \star \\ \star & \star & \star & \star & 13 \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Matrix, wobei die Sterne jeweils reelle Zahlen mit $|\star| \leq \frac{1}{4}$ bezeichnen. Zeige, daß die Vektoriteration mit dem Startwert e_5 gegen einen Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert von A konvergiert, d.h. daß der Startwert e_5 für die Vektoriteration geeignet ist. (15 Punkte)

Aufgabe 36:
a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, und seien $c_i \in \mathbb{C}$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms p_A von A, d.h.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda^i.$$

Zu einem beliebigen Vektor $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ betrachte die Iterierten $z^{(i)} = A^i z^{(0)}$ der Matrix A. Zeige, daß eine lineare Abhängigkeit der Form

$$\sum_{i=0}^{n} c_i z^{(i)} = 0, \qquad c_n = (-1)^n. \tag{$\star$}$$

besteht. (Hinweis: Satz von Cayley-Hamilton.)
b) Sei nun A normal. Zeige, daß die Koeffizienten durch die Bedingung $(\star)$ für alle $z^{(0)}$ genau dann eindeutig bestimmt sind, wenn alle Eigenwerte von A einfach sind. (Hinweis: Vandermonde-Determinante.)
(15 Punkte)

Programmieraufgabe 4:
Die Schwingungen einer inhomogenen Saite werden durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)$$

beschrieben, wobei $u(x,t)$ die Auslenkung der Saite an der Stelle x zum Zeitpunkt t und $\rho(x)$ die Dichte der Saite an der Stelle x bezeichnen. Wir interessieren uns für Lösungen der Form

$$u(x,t) = v(x)g(t).$$

Dann folgt (unter geeigneten Annahmen) aus der Differentialgleichung

$$\frac{v''(x)}{\rho(x)v(x)} = \frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Da die linke Seite unabhängig von t und die rechte unabhängig von x ist, müssen sie konstant sein; bezeichne die Konstante mit $-\lambda$. Die Funktion v genügt folglich dem Sturm-Liouville-Eigenwertproblem

$$v''(x) + \lambda\rho(x)v(x) = 0.$$

Die Saite sei an den Enden $x = 0$ und $x = 1$ fest eingespannt, so daß wir als Randwerte

$$v(0) = v(1) = 0$$

fordern. Dieses kontinuierliche Eigenwertproblem wird wie in der Vorlesung beschrieben diskretisiert, so daß sich das diskrete Eigenwertproblem

$$-A\mathbf{v} + \lambda R\mathbf{v} = 0$$

für den Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} r(x_1) & & & \\ & r(x_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & r(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

ergibt.
Schreibe ein C–, C++– oder Javaprogramm, das mit Hilfe des QR–Verfahrens alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren bestimmt. Teste es anhand der Dichtefunktion

$$\rho(x) = x^2$$

und den Schrittweiten $h = \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$. Stelle die Eigenfunktionen graphisch mit MatLab dar. (Hinweis: Die Daten können ähnlich wie in Programmieraufgabe 2 eingelesen und mit dem Befehl `plot` dargestellt werden.)

(10 Punkte)