Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 7

Ausgabe: 5.12.2002, Abgabe der Lösungen: 12.12.2002, 10:30

Aufgabe 29:
Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm des $\mathbb{C}^{n\times n}$. ($\|\cdot\|$ muß nicht notwendigerweise eine Operatornorm sein.) Zeige, daß für jede diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(A).$$

Bemerkung: Dieses Verfahren zur Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes von A ist als *Power-Methode* bekannt. (10 Punkte)

Aufgabe 30:
Bestimme für $\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ die Eigenwerte $\lambda_{i,\varepsilon}$ und die Eigenvektoren $v_{i,\varepsilon}$ $(i = 1, 2)$ der Matrix

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\frac{1}{\varepsilon} & -\varepsilon\sin\frac{1}{\varepsilon} \\ -\varepsilon\sin\frac{1}{\varepsilon} & 1-\varepsilon\cos\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Wie verhalten sich A_ε, $\lambda_{i,\varepsilon}$ und $v_{i,\varepsilon}$ für $\varepsilon \to 0$? (10 Punkte)

Aufgabe 31:
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeige, daß jeder Eigenwert λ von A in einem der Gerschgorinkreise von A liegt, d.h.

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i \cap \bigcup_{i=1}^{n} K_i^T,$$

wobei

$$K_i = \Big\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ j\ne i}} |a_{ij}| \Big\}, \qquad K_i^T = \Big\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ j\ne i}} |a_{ji}| \Big\}.$$

Folgere, daß strikt diagonaldominante Matrizen (vgl. Aufgabe 7) positiv definit sind. (10 Punkte)

Aufgabe 32:
Bestimme die reellen Eigenwerte λ und die zugehörigen Eigenfunktionen des Sturm-Liouville-Eigenwertproblems

$$u''(x) + \frac{\lambda}{x^2} u(x) = 0$$

auf dem Intervall (a, b) zu den Randwerten

$$u(a) = u(b) = 0,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$.
Hinweis: Transformiere die Differentialgleichung für festes λ vermöge $s = \ln x$ in eine neue Differentialgleichung für die Funktion $v(s)$, löse sie und transformiere zurück. (15 Punkte)