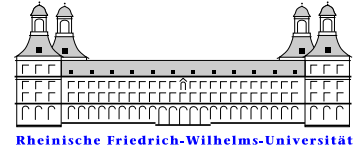




# Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03  
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt



## Aufgabenblatt 7

Ausgabe: 5.12.2002, Abgabe der Lösungen: 12.12.2002, 10:30

### Aufgabe 29:

Sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm des  $\mathbb{C}^{n \times n}$ . ( $\|\cdot\|$  muß nicht notwendigerweise eine Operatornorm sein.) Zeige, daß für jede diagonalisierbare Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(A).$$

Bemerkung: Dieses Verfahren zur Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes von  $A$  ist als *Power-Methode* bekannt. (10 Punkte)

### Aufgabe 30:

Bestimme für  $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  die Eigenwerte  $\lambda_{i,\varepsilon}$  und die Eigenvektoren  $v_{i,\varepsilon}$  ( $i = 1, 2$ ) der Matrix

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \cos \frac{1}{\varepsilon} & -\varepsilon \sin \frac{1}{\varepsilon} \\ -\varepsilon \sin \frac{1}{\varepsilon} & 1 - \varepsilon \cos \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Wie verhalten sich  $A_\varepsilon$ ,  $\lambda_{i,\varepsilon}$  und  $v_{i,\varepsilon}$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ ?

(10 Punkte)

### Aufgabe 31:

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Zeige, daß jeder Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  in einem der Gerschgorinkreise von  $A$  liegt, d.h.

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n K_i \cap \bigcup_{i=1}^n K_i^T,$$

wobei

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} |a_{ij}| \right\}, \quad K_i^T = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} |a_{ji}| \right\}.$$

Folgere, daß strikt diagonaldominante Matrizen (vgl. Aufgabe 7) positiv definit sind.

(10 Punkte)

### Aufgabe 32:

Bestimme die reellen Eigenwerte  $\lambda$  und die zugehörigen Eigenfunktionen des Sturm-Liouville-Eigenwertproblems

$$u''(x) + \frac{\lambda}{x^2} u(x) = 0$$

auf dem Intervall  $(a, b)$  zu den Randwerten

$$u(a) = u(b) = 0,$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$ .

Hinweis: Transformiere die Differentialgleichung für festes  $\lambda$  vermöge  $s = \ln x$  in eine neue Differentialgleichung für die Funktion  $v(s)$ , löse sie und transformiere zurück. (15 Punkte)