Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 6

Ausgabe: 28.11.2002, Abgabe der Lösungen: 5.12.2002, 10:30
Abgabe der Programmieraufgaben: 10.-13.12.2002, genauer Termin nach Vereinbarung.

Aufgabe 25:
Betrachte das lineare Ausgleichsproblem: Zu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ finde $x \in \mathbb{R}^n$, so daß $\|Ax-b\|_2$ minimal ist.
a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Stelle die zugehörige Normalengleichung explizit auf und bestimme die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$. Berechne das Residuum $r = Ax - b$ und den mittleren quadratischen Fehler $e := \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m r_i^2}$.
b) Das lineare Ausgleichsproblem aus a) werde um die (möglichst gut zu erfüllenden) Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

erweitert. Gib die zugehörige neue Matrix $\tilde{A}$ und den Vektor $\tilde{b}$ an. Stelle die Normalengleichung explizit auf und bestimme die Lösung $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$. Berechne das Residuum und den mittleren quadratischen Fehler.
(10 Punkte)

Aufgabe 26:
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$.
b) Berechne die Pseudoinverse A^+ und berechne damit die Lösung x des linearen Ausgleichsproblems

$$\|Ax - b\|_2 \to \min.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 27:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, und sei $\sigma_{\max}$ der größte Singulärwert von A.
a) Zeige:

$$\sigma_{\max} = \max\left\{ \frac{x^T A y}{\|x\|_2 \|y\|_2} \;\middle|\; x \neq 0, y \neq 0 \right\}$$

b) A^+ bezeichne die Pseudoinverse von A. Zeige für $A \neq 0$:

$$\|AA^+\|_{2\to 2} = \|A^+A\|_{2\to 2} = 1.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 28:
a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $A \neq 0$. Zeige, daß $A^T A$ einen positiven Eigenwert besitzt.
b) Zeige, daß ein $\alpha > 0$ und Householdermatrizen $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ und $Q \in \mathrm{O}(m, \mathbb{R})$ existieren, so daß

$$APe_1 = \alpha Qe_1 \qquad A^T Qe_1 = \alpha Pe_1$$

c) Zeige, daß $Q^T AP$ die Gestalt

$$Q^T AP = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(n-1)}$ besitzt.
d) Folgere aus c) den Satz zur Singulärwertzerlegung: Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang r existieren $U \in \mathrm{O}(m, \mathbb{R})$, $V \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ und Singulärwerte $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, so daß

$$A = U\Sigma V^T$$

mit

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

ist. (10 Punkte)

Programmieraufgabe 3:
Schreibe in C–, C++– oder Javaprogramm, das die QR–Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mittels Householdertransformationen berechnet. Löse damit für verschiedene $m = n$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad \text{und} \qquad b = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}\right)_{i=1,\dots,m}.$$

(Zur Kontrolle: die exakte Lösung ist $x = (1, \dots, 1)^T$.)
Löse mit Hilfe der QR–Zerlegung das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min$$

für die oben genannte Matrix für verschiedene m, n mit $m \geq n$ und

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme jeweils die Euklidische Norm des Residuums. (10 Punkte)