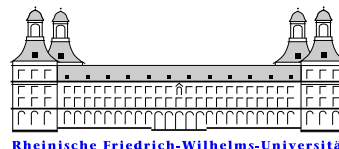




Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt



Aufgabenblatt 6

Ausgabe: 28.11.2002, Abgabe der Lösungen: 5.12.2002, 10:30
Abgabe der Programmieraufgaben: 10.-13.12.2002, genauer Termin nach Vereinbarung.

Aufgabe 25:

Betrachte das lineare Ausgleichsproblem: Zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ finde $x \in \mathbb{R}^n$, so daß $\|Ax - b\|_2$ minimal ist.

a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Stelle die zugehörige Normalengleichung explizit auf und bestimme die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$. Berechne das Residuum $r = Ax - b$ und den mittleren quadratischen Fehler $e := \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i^2}$.

b) Das lineare Ausgleichsproblem aus a) werde um die (möglichst gut zu erfüllenden) Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

erweitert. Gib die zugehörige neue Matrix \tilde{A} und den Vektor \tilde{b} an. Stelle die Normalengleichung explizit auf und bestimme die Lösung $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$. Berechne das Residuum und den mittleren quadratischen Fehler. (10 Punkte)

Aufgabe 26:

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$.

b) Berechne die Pseudoinverse A^+ und berechne damit die Lösung x des linearen Ausgleichsproblems

$$\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min. \quad (10 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 27:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, und sei σ_{\max} der größte Singulärwert von A .

a) Zeige:

$$\sigma_{\max} = \max \left\{ \frac{x^T A y}{\|x\|_2 \|y\|_2} \mid x \neq 0, y \neq 0 \right\}$$

b) A^+ bezeichne die Pseudoinverse von A . Zeige für $A \neq 0$:

$$\|AA^+\|_{2 \rightarrow 2} = \|A^+A\|_{2 \rightarrow 2} = 1. \quad (10 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 28:

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $A \neq 0$. Zeige, daß $A^T A$ einen positiven Eigenwert besitzt.

b) Zeige, daß ein $\alpha > 0$ und Householdermatrizen $P \in O(n, \mathbb{R})$ und $Q \in O(m, \mathbb{R})$ existieren, so daß

$$APe_1 = \alpha Qe_1 \quad A^T Qe_1 = \alpha Pe_1$$

c) Zeige, daß $Q^T AP$ die Gestalt

$$Q^T AP = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & B \end{array} \right)$$

mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (n-1)}$ besitzt.

d) Folgere aus c) den Satz zur Singulärwertzerlegung: Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang r existieren $U \in O(m, \mathbb{R})$, $V \in O(n, \mathbb{R})$ und Singulärwerte $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, so daß

$$A = U \Sigma V^T$$

mit

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

ist.

(10 Punkte)

Programmieraufgabe 3:

Schreibe in C-, C++- oder Javaprogramm, das die QR -Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mittels Householdertransformationen berechnet. Löse damit für verschiedene $m = n$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \quad \text{und} \quad b = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1} \right)_{i=1, \dots, m}.$$

(Zur Kontrolle: die exakte Lösung ist $x = (1, \dots, 1)^T$.)

Löse mit Hilfe der QR -Zerlegung das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$$

für die oben genannte Matrix für verschiedene m, n mit $m \geq n$ und

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme jeweils die Euklidische Norm des Residuums.

(10 Punkte)