Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 5

Ausgabe: 21.11.2002, Abgabe der Lösungen: 28.11.2002, 10:30

Aufgabe 20:
Bestimme die QR–Zerlegungen der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{6}{5\sqrt{3}} & \frac{14}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-3}{5} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{9\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} & \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

A mittels Householder-Reflektionen und B mittels Givens-Rotationen. (8 Punkte)

Aufgabe 21:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix.
a) Sei $A = QR$ die QR–Zerlegung von A. Zeige:

$$\kappa_2(R) = \kappa_2(A), \qquad \kappa_2(Q) = 1.$$

Also verschlechtert die Kondition sich bei der QR-Zerlegung nicht.
b) Nun sei A regulär und besitze die LR–Zerlegung $A = LR$. Zeige

$$\kappa_2(A) \le \kappa_2(L)\kappa_2(R).$$

c) Zeige anhand des Beispiels

$$A = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$, daß die LR–Zerlegung die Kondition verschlechtert kann:

$$\kappa_2(A) = O(a), \qquad \kappa_2(L)\kappa_2(R) = o(a^3) \qquad \text{für } a \to \infty.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 22:
Bestimme (in $\mathbb{C}$) die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Determinante der Matrizen

$$Q_v := I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} \qquad \text{(Householder-Reflektion)}$$

$$G_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{(Givens-Rotation),}$$

wobei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ sind. (8 Punkte)

Aufgabe 23:
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Der Wertebereich von A ist als

$$W(A) := \left\{ \frac{x^*Ax}{x^*x} : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$$

definiert.
a) Zeige, daß für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt: $\lambda \in W(A)$.
b) Zeige, daß $W(A)$ beschränkt ist.
c) Sei A normal, d.h. $A^*A = AA^*$. Zeige, daß $W(A)$ die konvexe Hülle der Eigenwerte von A ist.
d) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $W(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \frac{1}{2}\}$. (10 Punkte)

Aufgabe 24:
a) Zeige, daß für jede Norm N des $\mathbb{C}^n$ und jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt:

$$\rho(A) \leq \|A\|_{N\to N}.$$

Hierbei bezeichnet $\rho(A)$ (wie üblich) den Spektralradius der Matrix A.
b) Konstruiere zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Norm N des $\mathbb{C}^n$, so daß

$$\|A\|_{N\to N} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Kann N unabhängig von A konstruiert werden?
Hinweis: Transformiere A auf die Jordan-Normalform. (10 Punkte)