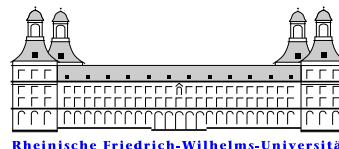




# Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03  
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt



## Aufgabenblatt 5

Ausgabe: 21.11.2002, Abgabe der Lösungen: 28.11.2002, 10:30

### Aufgabe 20:

Bestimme die  $QR$ -Zerlegungen der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{6}{5\sqrt{3}} & \frac{14}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{9\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} & \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$A$  mittels Householder-Reflexionen und  $B$  mittels Givens-Rotationen.

(8 Punkte)

### Aufgabe 21:

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix.

a) Sei  $A = QR$  die  $QR$ -Zerlegung von  $A$ . Zeige:

$$\kappa_2(R) = \kappa_2(A), \quad \kappa_2(Q) = 1.$$

Also verschlechtert die Kondition sich bei der  $QR$ -Zerlegung nicht.

b) Nun sei  $A$  regulär und besitze die  $LR$ -Zerlegung  $A = LR$ . Zeige

$$\kappa_2(A) \leq \kappa_2(L)\kappa_2(R).$$

c) Zeige anhand des Beispiels

$$A = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit  $a \in \mathbb{R}$ , daß die  $LR$ -Zerlegung die Kondition verschlechtert kann:

$$\kappa_2(A) = O(a), \quad \kappa_2(L)\kappa_2(R) = o(a^3) \quad \text{für } a \rightarrow \infty. \quad (10 \text{ Punkte})$$

### Aufgabe 22:

Bestimme (in  $\mathbb{C}$ ) die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Determinante der Matrizen

$$Q_v := I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} \quad (\text{Householder-Reflexion})$$

$$G_\varphi := \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{Givens-Rotation}),$$

wobei  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$  sind.

(8 Punkte)

### Aufgabe 23:

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix. Der Wertebereich von  $A$  ist als

$$W(A) := \left\{ \frac{x^* A x}{x^* x} : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$$

definiert.

a) Zeige, daß für jeden Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $A$  gilt:  $\lambda \in W(A)$ .

b) Zeige, daß  $W(A)$  beschränkt ist.

c) Sei  $A$  normal, d.h.  $A^* A = A A^*$ . Zeige, daß  $W(A)$  die konvexe Hülle der Eigenwerte von  $A$  ist.

d) Für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  gilt  $W(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{2}\}$ . (10 Punkte)

**Aufgabe 24:**

a) Zeige, daß für jede Norm  $N$  des  $\mathbb{C}^n$  und jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gilt:

$$\rho(A) \leq \|A\|_{N \rightarrow N}.$$

Hierbei bezeichnet  $\rho(A)$  (wie üblich) den Spektralradius der Matrix  $A$ .

b) Konstruiere zu jedem  $\varepsilon > 0$  und jeder Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Norm  $N$  des  $\mathbb{C}^n$ , so daß

$$\|A\|_{N \rightarrow N} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Kann  $N$  unabhängig von  $A$  konstruiert werden?

Hinweis: Transformiere  $A$  auf die Jordan-Normalform.

(10 Punkte)