Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 4

Ausgabe: 14.11.2002, Abgabe der Lösungen: 21.11.2002, 10:30
Abgabe der Programmieraufgaben: 25.-29.11.2002, genauer Termin nach Vereinbarung.

Aufgabe 16:
Der Spektralradius einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist als

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

definiert.
a) Zeige, daß $\rho(A)$ keine Norm ist. (3 Punkte)
b) Zeige für $B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\|B\|_{1\to 1} = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| \qquad \text{(Spaltensummennorm)},$$

$$\|B\|_{2\to 2} = \sqrt{\rho(B^T B)} \qquad \text{(Spektralnorm)},$$

$$\|B\|_{\infty\to\infty} = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \qquad \text{(Zeilensummennorm)},$$

wobei unter $\|B\|_{p\to p}$ die Operatornorm bezüglich der p–Norm gemäß Aufgabenblatt 3 zu verstehen ist. (9 Punkte)

Aufgabe 17:
Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Setze

$$|\lambda_{\max}| = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}, \qquad |\lambda_{\min}| = \min\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

a) Zeige für jede Norm N des $\mathbb{R}^n$ die Konditionsabschätzung

$$\kappa_N(A) := \|A\|_{N\to N}\|A^{-1}\|_{N\to N} \geq \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}. \qquad \text{(5 Punkte)}$$

b) Zeige, daß im Fall der Euklidischen Norm für symmetrische Matrizen A sogar Gleichheit gilt:

$$\kappa_2(A) := \|A\|_{2\to 2}\|A^{-1}\|_{2\to 2} = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}.$$

Finde eine nichtsymmetrische Matrix A, für die Ungleichheit vorliegt. (5 Punkte)

Aufgabe 18:
a) Beweise die Submultiplikativität der Frobeniusnorm: Für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ gilt

$$\|AB\|_{\mathrm{F}} \leq \|A\|_{\mathrm{F}}\|B\|_{\mathrm{F}}. \qquad \text{(5 Punkte)}$$

b) Zeige, daß die Frobeniusnorm $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ (siehe Aufgabe 14) eine obere Abschätzung für die Spektralnorm $\|\cdot\|_{2\to 2}$ ist, d.h. daß für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt:

$$\|A\|_{2\to 2} \leq \|A\|_F.$$

Bemerkung: Die einfach berechenbare Frobeniusnorm wird daher oft als Schranke für die numerisch aufwendig zu berechnende Spektralnorm verwendet. (5 Punkte)

Aufgabe 19:
Zeige, daß die QR–Zerlegung einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ genau bis auf die Vorzeichen der Diagonalelemente von R eindeutig ist. (10 Punkte)

Programmieraufgabe 2:
a) Schreibe ein C–, C++– oder Javaprogramm, das die LR–Zerlegung (ohne Pivotsuche) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ berechnet und zu einem Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mittels Vorwärtssubstitution $Ly = b$ und Rückwärtssubstitution $Rx = y$ berechnet. Gib die Matrizen L und R sowie den Vektor x auf dem Bildschirm aus. Teste das Programm anhand des Beispiels aus Aufgabe 8 auf Blatt 2.
b) Schreibe ein C–, C++– oder Javaprogramm, das die Cholesky–Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und (wie oben) die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ berechnet. Teste das Programm für $m \in \{7^2, 15^2, 31^2\}$ anhand der Matrix A aus der Vorlesung, die durch Diskretisierung des Differentialoperators $-\Delta$ entsteht, und der rechten Seite $b = (1, \dots, 1)^T$. Dies entspricht der diskreten Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \qquad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für eine Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Die Lösung x des linearen Gleichungssystems entspricht also approximierten Funktionswerten von u.
Visualisiere das Ergebnis, z.B. mit dem Programm MatLab. (10 Punkte)

Hinweis: Zur Beschleunigung des Algorithmus kann die Bandstruktur von A genutzt werden. (freiwillig)

Hilfestellung: Folgendes C–Programmfragment schreibt einen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ in eine Datei mit dem Namen „x“, wobei n mit $m = n^2$ bereits definiert sein muß. Die Ausgabe erfolgt bereits als quadratische $(n+2) \times (n+2)$–Matrix mit den Nullrandwerten.

```
FILE* f;
int i,j;

if ((f=fopen("x","w"))==NULL)
    printf("Die Datei x konnte leider nicht geschrieben werden!\n");
else
    {
    for (j=0; j<n+2; j++)
        fprintf(f, "0 ");
    fprintf(f, "\n");
    for (i=0; i<n; i++)
        {
        fprintf(f, "0 ");
        for (j=0; j<n; j++)
            fprintf(f, "%e ", x[n*i+j]);
        fprintf(f, "0\n");
        }
    for (j=0; j<n+2; j++)
        fprintf(f, "0 ");
    printf("\n");
    fclose(f);
    }
```

Das Programmfragment ist unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/prama1_ws02/ausgabe.c verfügbar.
Die so geschriebenen Daten können folgendermaßen grafisch dargestellt werden:

`matlab -nojvm`	(Matlab starten)
`load x`	(Daten aus der Datei `x` in die Variable `x` laden)
`surf(x)`	(Daten als Oberflächenplot darstellen)