Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03

Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

Aufgabenblatt 3

Ausgabe: 7.11.2002, Abgabe der Lösungen: 14.11.2002, 10:30

Aufgabe 11:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Der erste Schritt der LR–Zerlegung von A führt zur Darstellung

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline l_{21} & & & \\ \vdots & & I & \\ l_{n1} & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Zeige, daß B wieder symmetrisch und positiv definit ist. Folgere, daß A eine LR–Zerlegung (ohne Pivotisierung) besitzt. (10 Punkte)

Aufgabe 12:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Zeige:
a) Ist A ist positiv definit, so sind alle Hauptminoren

$$M_k(A) := \det\,(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}$$

positiv. Ist A negativ definit, so gilt für alle $k = 1,\ldots,n$

$$(-1)^k M_k(A) > 0.$$

(Die Eigenschaften sind sogar äquivalent. Dies soll hier jedoch nicht gezeigt werden.) (7 Punkte)
b) Ist A positiv oder negativ definit, so ist A regulär. (3 Punkte)

Aufgabe 13:
Für $x = (x_1,\ldots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$ definiere folgende Normen:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

a) Zeige:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

b) Skizziere von Hand für alle $p \in \{1,2,\infty\}$ die Menge

$$B^p := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_p = 1\}. \qquad \text{(3 Punkte)}$$

c) Zeige: Für alle $p,q \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq q \leq p \leq \infty$ gibt es eine Konstante $c_{p,q,n} \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq c_{p,q,n}\|x\|_p.$$

Bestimme die kleinste Konstante $c_{p,q,n}$ mit dieser Eigenschaft. Finde für beide Ungleichungen einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, für den Gleichheit vorliegt. (10 Punkte)

Aufgabe 14:
Seien U, V und W $\mathbb{R}$–Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_U$, $\|\cdot\|_V$ bzw. $\|\cdot\|_W$. Die Operatornorm eines Homomorphismus $A : U \to V$ ist definiert durch

$$\|A\|_{U\to V} := \sup_{u\in U} \frac{\|Au\|_V}{\|u\|_U}.$$

a) Zeige die Submultiplikativität von Operatornormen:

$$\|B\circ A\|_{U\to W} \leq \|B\|_{V\to W}\|A\|_{U\to V}$$

für Homomorphismen $A : U \to V$ und $B : V \to W$. $\circ$ bezeichnet wie üblich die Komposition von Abbildungen. (3 Punkte)

b) Die Frobeniusnorm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert durch

$$\|A\|_{\mathrm{F}} := \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Zeige, daß es für $n \geq 2$ keine Norm $\|\cdot\|_N$ des $\mathbb{R}^n$ gibt, sodaß $\|\cdot\|_{\mathrm{F}} = \|\cdot\|_{N\to N}$. (5 Punkte)

Aufgabe 15:
Die symmetrische Matrix $A = (a_{\mu\nu})_{\mu\nu} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genüge dem *schwachen Zeilensummenkriterium:* Für alle μ gelte

$$a_{\mu\mu} \geq \sum_{\nu:\nu\neq\mu} |a_{\mu\nu}|,$$

und es gebe ein μ_0 mit

$$a_{\mu_0\mu_0} > \sum_{\nu:\nu\neq\mu_0} |a_{\mu_0\nu}|.$$

Ferner genüge A der folgenden Kopplungseigenschaft: Sind $I_1, I_2 \subset \{1,\ldots,n\}$ mit $I_1 \cup I_2 = \{1,\ldots,n\}$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $a_{\mu\nu} = 0$ für alle $\mu \in I_1, \nu \in I_2$, so folgt $I_1 = \emptyset$ oder $I_2 = \emptyset$.

a) Zeige, daß A positiv definit ist. (8 Punkte)

b) Zeige durch ein Gegenbeispiel, daß die Kopplungseigenschaft für a) erforderlich ist. (3 Punkte)

c) Zeige, daß die bei der Diskretisierung des negativen Laplaceoperators entstehende Matrix aus der Vorlesung eine Cholesky–Zerlegung besitzt. (3 Punkte)