# Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

## Aufgabenblatt 2

Ausgabe: 31.10.2002, Abgabe der Lösungen: 7.11.2002, 10:30

**Aufgabe 6:**
a) Zeige, daß die $LR$–Zerlegung einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eindeutig ist, soweit sie existiert. Gilt dies auch, falls $A$ singulär ist?
b) Finde eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, die keine $LR$–Zerlegung besitzt.
c) Ist die Zerlegung $LR = PA$ aus der Vorlesung einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eindeutig? (Beweis bzw. Gegenbeispiel) (10 Punkte)

**Aufgabe 7:**
Eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *strikt diagonaldominant*, falls gilt:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ j \neq i}} |a_{ij}| \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Zeige: Ist $A$ strikt diagonaldominant, so ist die Gaußelimination ohne Pivotsuche durchführbar, und die bei jedem Teilschritt entstehende Matrix $A^{(i)}$ ist wieder strikt diagonaldominant. (10 Punkte)

**Aufgabe 8:**
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -4 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die $LR$–Zerlegung der Matrix $A$ und löse damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. (10 Punkte)

**Aufgabe 9:**
a) Eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Bandmatrix* mit der *Bandbreite* $2m + 1$, falls gilt:

$$|i - j| > m \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} = 0.$$

Zeige, daß die $LR$–Zerlegung die Bandstruktur erhält, d.h. ist $A$ eine Bandmatrix mit Bandbreite $2m + 1$, so auch $L$ und $R$.
b) Bei der Diskretisierung von Differentialoperatoren treten oft Matrizen auf, bei denen bis auf die Hauptdiagonale und wenige Nebendiagonalen alle Einträge verschwinden, also Matrizen mit

$$|i - j| \notin I \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} = 0,$$

wobei $I \subset \mathbb{N}$ die Diagonalen mit nichtverschwindenden Einträgen indiziert. (I. allg. gilt $I \neq \{0, 1, \dots, m\}$, so daß sich diese Matrizen von den oben beschriebenen Bandmatrizen unterscheiden.) Bleibt diese Struktur bei der $LR$–Zerlegung erhalten? (10 Punkte)

**Aufgabe 10:**
Zu berechnen sei die Summe $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ positiver Maschinenzahlen $x_i$. Schätze den relativen Fehler bei der Berechnung $\tilde{f}$ von $f$ in der Form

$$\frac{\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)} \leq C(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathrm{eps}$$

ab, wobei eps die Maschinengenauigkeit bezeichnet. In welcher Reihenfolge sollte die Summation durchgeführt werden, um den Fehler möglichst gering zu halten? (10 Punkte)