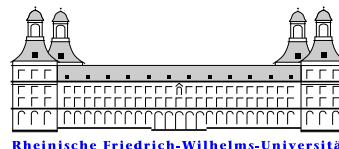




# Praktische Mathematik I

Wintersemester 2002/03  
Prof. Dr. Angela Kunoth, Marcel Arndt



## Aufgabenblatt 2

Ausgabe: 31.10.2002, Abgabe der Lösungen: 7.11.2002, 10:30

### Aufgabe 6:

- Zeige, daß die  $LR$ -Zerlegung einer Matrix  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  eindeutig ist, soweit sie existiert. Gilt dies auch, falls  $A$  singular ist?
- Finde eine Matrix  $A \in GL(2, \mathbb{R})$ , die keine  $LR$ -Zerlegung besitzt.
- Ist die Zerlegung  $LR = PA$  aus der Vorlesung einer Matrix  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  eindeutig? (Beweis bzw. Gegenbeispiel) (10 Punkte)

### Aufgabe 7:

Eine Matrix  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *strikt diagonaldominant*, falls gilt:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} |a_{ij}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Zeige: Ist  $A$  strikt diagonaldominant, so ist die Gaußelimination ohne Pivotsuche durchführbar, und die bei jedem Teilschritt entstehende Matrix  $A^{(i)}$  ist wieder strikt diagonaldominant. (10 Punkte)

### Aufgabe 8:

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -4 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die  $LR$ -Zerlegung der Matrix  $A$  und löse damit das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$ . (10 Punkte)

### Aufgabe 9:

- Eine Matrix  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *Bandmatrix* mit der *Bandbreite*  $2m + 1$ , falls gilt:

$$|i - j| > m \implies a_{ij} = 0.$$

Zeige, daß die  $LR$ -Zerlegung die Bandstruktur erhält, d.h. ist  $A$  eine Bandmatrix mit Bandbreite  $2m + 1$ , so auch  $L$  und  $R$ .

- Bei der Diskretisierung von Differentialoperatoren treten oft Matrizen auf, bei denen bis auf die Hauptdiagonale und wenige Nebendiagonalen alle Einträge verschwinden, also Matrizen mit

$$|i - j| \notin I \implies a_{ij} = 0,$$

wobei  $I \subset \mathbb{N}$  die Diagonalen mit nichtverschwindenden Einträgen indiziert. (I. allg. gilt  $I \neq \{0, 1, \dots, m\}$ , so daß sich diese Matrizen von den oben beschriebenen Bandmatrizen unterscheiden.) Bleibt diese Struktur bei der  $LR$ -Zerlegung erhalten? (10 Punkte)

### Aufgabe 10:

Zu berechnen sei die Summe  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$  positiver Maschinenzahlen  $x_i$ . Schätze den relativen Fehler bei der Berechnung  $\tilde{f}$  von  $f$  in der Form

$$\frac{\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)} \leq C(x_1, \dots, x_n) \cdot \text{eps}$$

ab, wobei eps die Maschinengenauigkeit bezeichnet. In welcher Reihenfolge sollte die Summation durchgeführt werden, um den Fehler möglichst gering zu halten? (10 Punkte)