Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

03.07.2008

# Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

## Probeklausur

**mit Lösungen**

**Aufgabe 1**: (3+3 Punkte)

Es seien $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & \alpha(x,y,z) & := & (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy - xy\, dz, \\ \text{b)} & \beta(x,y,z) & := & (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy + xy\, dz. \end{array}$$

Sind $\alpha, \beta$ exakt? Geben Sie gegebenenfalls $F_\alpha, F_\beta \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ an, so dass $dF_\alpha = \alpha$ bzw. $dF_\beta = \beta$.

**Lösung**:

a) $\alpha(x,y,z) = (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy - xy\, dz$

Wir überprüfen zunächst, ob $\alpha$ geschlossen ist. Wäre dies nicht der Fall, so könnte $\alpha$ nicht exakt sein, da für $\alpha$ exakt gilt $d\alpha = d(dF_\alpha) = 0$. Es ist

$$d\alpha = -z\, dy \wedge dx - y\, dz \wedge dx - z\, dx \wedge dy - x\, dz \wedge dy - y\, dx \wedge dz - x\, dy \wedge dz = 0,$$

also ist $\alpha$ geschlossen.
Nun bestimme $F_\alpha$ wie folgt: $F_\alpha = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xyz$, dann gilt $dF_\alpha = \alpha$.

b) $\beta(x,y,z) = (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy + xy\, dz$

Analog zu oben bestimmen wir $d\beta$:

$$d\beta = -z\, dy \wedge dx - y\, dz \wedge dx - z\, dx \wedge dy - x\, dz \wedge dy + y\, dx \wedge dz + x\, dy \wedge dz = 2y\, dx \wedge dz + 2x\, dy \wedge dz$$

also ist $\beta$ nicht geschlossen und folglich nicht exakt.

**Aufgabe 2**: (6 Punkte)

Sei die Form $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gegeben durch

$$\omega(x) := \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l+1} a_l(x)\; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{l-1} \wedge \widehat{dx_l} \wedge dx_{l+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $a_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Weiterhin definieren wir $T : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, durch

$$u = (u_1, \ldots, u_{n-1}) \to T(u) := (u_1, \ldots, u_{n-1}, f(u)),$$

wobei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion sei.
Berechnen Sie die Zurückziehung $T^*\omega$.

**Lösung**:

$$\begin{aligned}
T^*\omega(u) &= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l+1}\; (a_l \circ T)(u)\; dT_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dT_l} \wedge \cdots \wedge dT_n && (1)\\
&= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l+1}\; (a_l \circ T)(u)\; du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_l} \wedge \cdots \wedge \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial u_k}(u) du_k && (2)\\
&= \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{n+l+1}\; (a_l \circ T)(u)\; du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_l} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial f}{\partial u_l}(u) du_l && (3)\\
&+ (-1)^{2n+1}\; (a_n \circ T)(u)\; du_1 \wedge \cdots \wedge du_{n-1} && (4)\\
&= \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{n+l+1} \cdot (-1)^{n-l-1} \cdot (a_l \circ T)(u) \cdot \frac{\partial f}{\partial u_l}(u)\; du_1 \wedge \cdots \wedge du_{n-1} && (5)\\
&- (a_n \circ T)(u)\; du_1 \wedge \cdots \wedge du_{n-1} && (6)\\
&= \left( \sum_{l=1}^{n-1} (a_l \circ T) \cdot \frac{\partial f}{\partial u_l}(u) - a_n \circ T \right)(u)\; du_1 \wedge \cdots \wedge du_{n-1} && (7)
\end{aligned}$$

Erläuterungen zu den einzelnen Schritten:

(1) Definition der Zurückziehung.

(2) Ausrechnen von (1) mit der Definition von $T$ und $dT_n$.

(3) In der hinteren Summe fallen alle Summanden weg, wo die gleiche 1-Form vorne schon auftaucht.

(4) Letzter Summand einzeln aufgeschrieben, da er etwas anders aussieht.

(5) Vertauschen der 1-Formen mit Vorzeichenwechsel.

(6) $2n + 1$ ist ungerade.

(7) Umformung für schönere Notation.

**Aufgabe 3**: (3+3+4 Punkte)

a) Es sei $\varphi : [r, R] \times [0, K] \to \mathbb{R}^3$ mit $0 < r < R < \infty$ und $K > 0$ definiert durch

$$\varphi(t_1, t_2) := \begin{pmatrix} t_1 \cos(t_2) \\ t_1 \sin(t_2) \\ h t_2 \end{pmatrix},$$

$h > 0$. Berechnen Sie die Gramsche Determinante von $\varphi$.

b) Nun sei $\varphi : [r, R] \times [0, K] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\varphi(t_1, t_2) := \begin{pmatrix} t_1 \cos^3(t_2) \\ t_1 \sin^3(t_2) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Gramsche Determinante von $\varphi$.

c) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um das Kurvenintegral $\int_\gamma y^2\, dx + x\, dy$ zu bestimmen, wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ durch $\gamma(t) := (2\cos^3(t), 2\sin^3(t))^t$ parametrisiert ist.
(Tipp: Man benötigt Aufgabenteil b.)

**Lösung**:

a) Jacobi Matrix von $\varphi$:

$$D\varphi(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \cos(t_2) & -t_1 \sin(t_2) \\ \sin(t_2) & t_1 \cos(t_2) \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (D\varphi)^t D\varphi &= \begin{pmatrix} \cos^2(t_2) + \sin^2(t_2) & -t_1 \sin(t_2)\cos(t_2) + t_1 \sin(t_2)\cos(t_2) \\ -t_1 \sin(t_2)\cos(t_2) + t_1 \sin(t_2)\cos(t_2) & t_1^2 \sin^2(t_2) + t_1^2 \cos^2(t_2) + h^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1^2 + h^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also

$$\det\big((D\varphi)^t D\varphi\big) = t_1^2 + h^2.$$

b) Jacobi Matrix von $\varphi$:

$$D\varphi(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \cos^3(t_2) & -3t_1 \cos^2(t_2)\sin(t_2) \\ \sin^3(t_2) & 3t_1 \sin^2(t_2)\cos(t_2) \end{pmatrix}.$$

Also

$$\det\big((D\varphi)^t D\varphi\big) = (3t_1 \sin^2(t_2)\cos^2(t_2))^2.$$

c)

$$d\omega = (1 - 2y)\ dx \wedge dy$$

Die Kurve $\gamma$ schließt die Fläche ein, die durch $\varphi$ aus Aufgabenteil b) mit $r = 0$, $R = 2$ und $K = 2\pi$ beschrieben wird. Also

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_\varphi d\omega = \int_\varphi (1-2y)\ dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big(3t_1 \sin^2(t_2)\cos^2(t_2) - 6t_1 \sin^5(t_2)\cos^2(t_2)\big)\ dt_2 dt_1 \\
&= \int_0^2 \Bigg(3t_1 \left(\left[\frac{\sin^3(t_2)\cos(t_2)}{4}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(t_2)\ dt_2\right) \\
&\quad -6t_1 \left(\left[\frac{\sin^6(t_2)\cos(t_2)}{7}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{7}\int_0^{2\pi} \sin^5(t_2)\ dt_2\right)\Bigg)\ dt_1 \\
&= \int_0^2 \Big(3t_1(0+\frac{\pi}{4}) - 6t_1(0+0)\Big)\ dt_1 \\
&= \left[\frac{3}{8}\pi t_1^2\right]_0^2 = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 4**: (8 Punkte)

Für $U \subset \mathbb{R}^3$ offen sei das Vektorfeld $v \in C^\infty(U;\mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$v(x,y,z) := \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 z^2 \\ xyz \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz

$$\int_D d\omega_v = \int_{\partial D} \omega_v$$

anhand des Vektorfeldes $v$ und des Würfels $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x,y,z < a\}$. Dabei ist $\omega_v \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\omega_v := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} v_i \; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n .$$

(Tipp: Beachten Sie die Orientierung der Flächenstücke des Würfels!)

**Lösung**:

Es ist

$$\omega_v = -y^2 z^2 \; dx \wedge dz + xyz \; dx \wedge dy$$

und damit

$$\begin{aligned} d\omega_v &= -2yz^2 \; dy \wedge dx \wedge dz + xy \; dz \wedge dx \wedge dy \\ &= 2yz^2 \; dx \wedge dy \wedge dz + xy \; dx \wedge dy \wedge dz \\ &= y(2z^2 + x) \; dx \wedge dy \wedge dz \; . \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_D d\omega_v &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a y(2z^2 + x) \; dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^a \int_0^a \frac{1}{2} a^2 (2z^2 + x) \; dx\, dz \\ &= \int_0^a \frac{1}{2} a^2 \left( 2z^2 a + \frac{1}{2} a^2 \right) \; dz \\ &= \frac{1}{2} a^2 \left( \frac{2}{3} a^4 + \frac{1}{2} a^3 \right) = \frac{1}{3} a^6 + \frac{1}{4} a^5 \; . \end{aligned}$$

Die sechs Seitenflächen des Würfels können parametrisiert werden durch die Funktionen $\varphi_i : (0,a) \times (0,a) \to \mathbb{R}^3 \; , \; i = 1, \ldots, 6 :$

$$\varphi_1(t_1,t_2) := \begin{pmatrix} a - t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2(t_1,t_2) := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(t_1,t_2) := \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ t_2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_4(t_1,t_2) := \begin{pmatrix} t_1 \\ a \\ a - t_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_5(t_1,t_2) := \begin{pmatrix} 0 \\ t_1 \\ a - t_2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_6(t_1,t_2) := \begin{pmatrix} a \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Für $i = 1, 3, 5, 6$ gilt offensichtlich $\int_{\varphi_i} \omega_v = 0$ (z.B. ist für $i = 1$: $z = 0$ oder für $i = 6$ gilt $d(\varphi_6)_1 = da = 0$). In den anderen Fällen rechnet man

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_2} \omega_v &= \int_{\varphi_2} \left(-y^2 z^2 \; dx\, dz + xyz \; dx\, dy\right) \\
&= \int_0^a \int_0^a \left(t_2^2 a^2 \; dt_1\, da + t_1 t_2 a \; dt_1\, dt_2\right) \\
&= 0 + \int_0^a t_1 \frac{1}{2} a^3 \; dt_2 \\
&= \frac{1}{2} a^3 \left(\frac{1}{2} a^2\right) = \frac{1}{4} a^5 \ ,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi_4} \omega_v &= \int_{\varphi_4} \left(-y^2 z^2 \; dx\, dz + xyz \; dx\, dy\right) \\
&= \int_0^a \int_0^a \left(a^2 (a - t_2^2) \; dt_1\, dt_2 + a t_1 t_2 \; dt_1\, da\right) \\
&= \int_0^a a^3 (a^2 - 2a t_2 + t_2^2) \; dt_2 + 0 \\
&= a^3 \left(a^3 - a^3 + \frac{1}{3} a^3\right) = \frac{1}{3} a^6 \ .
\end{aligned}$$

Damit erhält man also

$$\int_{\partial D} \omega_v = \int_{\varphi_2} \omega_v + \int_{\varphi_4} \omega_v = \frac{1}{4} a^5 + \frac{1}{3} a^6 = \int_D d\omega_v \ ,$$

was zu zeigen war.

**Aufgabe 5**: (2+2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die von dem reellen Parameter $a$ abhängige 1-Form $\omega_a \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$$\omega_a(x,y,z) := ((2-a)y + ye^z)\ dx + (ax + xe^z)\ dy + xye^z\ dz.$$

a) Für welches $a_0$ ist $\omega_{a_0}$ geschlossen? Ist $\omega_{a_0}$ exakt?

b) Sei nun $a = 1$. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \omega_1$ mit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t - t^2 \end{pmatrix}.$$

c) Stellen Sie $\omega_a$ als Summe zweier Differentialformen $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ dar, so dass $\omega_a = \alpha + \beta$ und $d\alpha = 0$ ist.

d) Berechnen Sie nun das Integral

$$\int_\varphi \omega_a = \int_\varphi \alpha + \int_\varphi \beta$$

mit $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

**Lösung**:

a)

$$\begin{aligned} d\omega_a =& -((2-a) + e^z)\, dx \wedge dy - ye^z dx \wedge dz \\ &+ (a + e^z)\, dx \wedge dy - xe^z dy \wedge dz \\ &+ ye^z dx \wedge dz + xe^z dy \wedge dz \\ =& 2\,(a-1)\, dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad d\omega_a = 0 \;\text{ für }\; a = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Stammfunktion:} \quad & F_{\omega_1} = xye^z + xy \\ \Rightarrow \quad & dF_{\omega_1} = \omega_1 = (y + ye^z)\, dx + (x + xe^z)\, dy + xye^z dz \\ \Rightarrow \quad & \omega_1 \text{ ist exakt.} \end{aligned}$$

b) Es gilt nach dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega_1 =& F_{\omega_1} \circ \gamma\,(1) - F_{\omega_1} \circ \gamma\,(0) \\ =& 2 - 0 = 2, \end{aligned}$$

wobei $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ die beiden Endpunkte der Kurve $\gamma$ sind, also $\partial\gamma = \{\gamma(0), \gamma(1)\}$.

c) Es ist

$$\omega_a = \alpha + \beta$$

$$\text{z.B. mit} \quad \alpha = ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz$$

$$\text{und} \quad \beta = (2-a)\, ydx + axdy \quad .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d\alpha =& - e^z dx \wedge dy - ye^z dx \wedge dz \\ & + e^z dx \wedge dy - xe^z dy \wedge dz \\ & + ye^z dx \wedge dy - xe^z dy \wedge dz \\ =& 0 \end{aligned}$$

Alternativ könnte man wählen:

$$\alpha = \omega_1 \;\Leftrightarrow\; d\alpha = d\omega_1 = 0$$

$$\text{und} \quad \beta = (1-a)\, ydx + (a-1)\, xdy$$

d) $\varphi$ ist eine geschlossene Kurve und daher Rand eines Gebietes $D$ mit $\partial D = \varphi$. Also

$$\int_\varphi \alpha = \int_D d\alpha = 0 \qquad (d\alpha = 0 \text{ aus Aufgabe c) bekannt})$$

Für das $\beta$-Integral folgt

$$\begin{aligned} \int_\varphi \beta =& \int_\varphi ((2-a)\, dx + a\, x\, dy) \\ =& \int_0^{2\pi} (a-2)\sin^2(t)\, dt + \int_0^{2\pi} a\cos^2(t)\, dt \\ =& 2\pi\,(a-1) \end{aligned}$$

**Aufgabe 6**: (2+2 Punkte)

Es sei $q \in (0,1)$, $I_n := [n, n + \frac{q^n}{n}]$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} n & \text{falls} \quad x \in I_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ und

b) bestimmen Sie $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx$.

**Lösung**:

a) Es gibt ein $\epsilon > 0$ (z.B. $\epsilon = \frac{1}{2}$), so dass zu jedem $y \in \mathbb{R}$ ein $x > y$ existiert mit $f(x) > \epsilon$, nämlich z.B. $x = p \in \mathbb{N}$ mit $p > y$. Dann ist $x \in I_p$ und $f(x) = p > \epsilon$.
Also $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^1(I_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{q^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \\ &= \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}. \end{aligned}$$

Die Summe konvergiert, da $|q| < 1$.