Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

03.07.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Probeklausur

Aufgabe 1: (3+3 Punkte)

Es seien $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & \alpha(x,y,z) & := & (x^2 - yz)\; dx + (y^2 - xz)\; dy - xy\; dz, \\ \text{b)} & \beta(x,y,z) & := & (x^2 - yz)\; dx + (y^2 - xz)\; dy + xy\; dz. \end{array}$$

Sind α, β exakt? Geben Sie gegebenenfalls $F_\alpha, F_\beta \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ an, so dass $dF_\alpha = \alpha$ bzw. $dF_\beta = \beta$.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei die Form $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gegeben durch

$$\omega(x) := \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n+l+1} a_l(x)\; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{l-1} \wedge \widehat{dx_l} \wedge dx_{l+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $a_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Weiterhin definieren wir $T : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, durch

$$u = (u_1, \ldots, u_{n-1}) \to T(u) := (u_1, \ldots, u_{n-1}, f(u))\,,$$

wobei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion sei.
Berechnen Sie die Zurückziehung $T^*\omega$.

Aufgabe 3: (3+3+4 Punkte)

a) Es sei $\varphi : [r, R] \times [0, K] \to \mathbb{R}^3$ mit $0 < r < R < \infty$ und $K > 0$ definiert durch

$$\varphi(t_1, t_2) := \begin{pmatrix} t_1 \cos(t_2) \\ t_1 \sin(t_2) \\ h t_2 \end{pmatrix},$$

$h > 0$. Berechnen Sie die Gramsche Determinante von φ.

Bitte wenden!

b) Nun sei $\varphi : [r, R] \times [0, K] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\varphi(t_1, t_2) := \begin{pmatrix} t_1 \cos^3(t_2) \\ t_1 \sin^3(t_2) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Gramsche Determinante von φ.

c) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um das Kurvenintegral $\int_\gamma y^2\, dx + x\, dy$ zu bestimmen, wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ durch $\gamma(t) := (2\cos^3(t), 2\sin^3(t))^t$ parametrisiert ist.
(Tipp: Man benötigt Aufgabenteil b.)

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Für $U \subset \mathbb{R}^3$ offen sei das Vektorfeld $v \in C^\infty(U; \mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$v(x, y, z) := \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 z^2 \\ xyz \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz

$$\int_D d\omega_v = \int_{\partial D} \omega_v$$

anhand des Vektorfeldes v und des Würfels $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x, y, z < a\}$. Dabei ist $\omega_v \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\omega_v := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} v_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

(Tipp: Beachten Sie die Orientierung der Flächenstücke des Würfels!)

Aufgabe 5: (2+2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die von dem reellen Parameter a abhängige 1-Form $\omega_a \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$$\omega_a(x, y, z) := ((2 - a)y + ye^z)\, dx + (ax + xe^z)\, dy + xye^z\, dz.$$

a) Für welches a_0 ist ω_{a_0} geschlossen? Ist ω_{a_0} exakt?

b) Sei nun $a = 1$. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \omega_1$ mit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t - t^2 \end{pmatrix}.$$

c) Stellen Sie ω_a als Summe zweier Differentialformen $\alpha, \beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ dar, so dass $\omega_a = \alpha + \beta$ und $d\alpha = 0$ ist.

Fortsetzung auf Seite 3!

d) Berechnen Sie nun das Integral

$$\int_\varphi \omega_a = \int_\varphi \alpha + \int_\varphi \beta$$

mit $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: (2+2 Punkte)

Es sei $q \in (0,1)$, $I_n := [n, n + \frac{q^n}{n}]$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} n & \text{falls} \quad x \in I_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq 0$ und

b) bestimmen Sie $\int_\mathbb{R} f(x)\ dx$.

Einige nützliche Formeln:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi$$

$$\int \sin^n(ax)\cos^m(ax)\ dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)\cos^{m-1}(ax)}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n(ax)\cos^{m-2}(ax)\ dx \qquad n, m \in \mathbb{N}_0, n > 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

Viel Erfolg!