Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

24.09.2008

# Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

## Nachklausur

Name, Vorname: ..............................................

Matrikelnummer: ..............................................

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 5 | 10 | 6 | 7 | 4 | 32 |
| Punkte | | | | | | |

| Aufgabe | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 8 | 8 | 4 | 8 | 10 | 38 |
| Punkte | | | | | | |

Gesamt (max 70): ..............................................

**Aufgabe 1**: (3+2 )

Sei die vom reellen Parameter $\lambda$ abhängige 1-Form $\omega_\lambda$ auf $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\omega_\lambda(x,y,z) := (\lambda xy - z^3)\ dx + (\lambda - 2)x^2\ dy + (1-\lambda)xz^2\ dz.$$

a) Für welches $\lambda_0$ ist $\omega_{\lambda_0}$ geschlossen?

b) Ist $\omega_{\lambda_0}$ exakt? Falls ja, geben Sie $F$ mit $dF = \omega_{\lambda_0}$ an.

**Aufgabe 2**: (4+6 )

Es sei $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$ und $\omega \in \Omega^1(U)$ definiert durch

$$\omega := \frac{z}{x^2+y^2}(y\ dx - x\ dy).$$

a) Berechnen Sie die Zurückziehung $\Phi^*\omega$ mit $\Phi : (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to U$ definiert durch
$$\Phi(s,t) := \begin{pmatrix} \cos s \cos t \\ \sin s \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

b) Verifizieren Sie $d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega)$ mit dem $\Phi$ aus Aufgabenteil a).

**Aufgabe 3**: (2+4 )

Es sei $\varphi : [0,1] \times [0,2\pi] \to V \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi(r,\theta) := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 1-r^2 \end{pmatrix}$ und $f : V \to \mathbb{R}$ gegeben als $f(x,y,z) = z\sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}$.

a) Berechnen Sie die Gramsche Determinante von $\varphi$.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_V f\ dxdydz$.

**Aufgabe 4**: (3+4 )

Benutzen Sie den Satz von Stokes, um die folgenden Kurvenintegrale zu bestimmen.

a)
$$\int_\gamma xe^{-y^2}\ dx + (x^2y^2 - x^2ye^{-y^2})\ dy,$$
wobei $\gamma$ der Rand des Quadrates mit den Ecken $(\pm a, \pm a)$, $a > 0$ ist.

b)
$$\int_\gamma (1+2yx)\ dxdz + x^2z\ dydz,$$
wobei $\gamma$ die Oberfläche des Zylinders mit Höhe 3 beschreibt, dessen Grundfläche ein Kreis in der $xy$-Ebene mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius 1 ist.

**Fortsetzung auf Seite 3!**

**Aufgabe 5**: (4 )

Betrachten Sie die 1-Form $\omega := x\, dx + y\, dy$ im $\mathbb{R}^2$ und die Punkte $z_0 := (0,0)$, $z_1 := (2,1) \in \mathbb{R}^2$. Außerdem sei $\gamma$ ein Weg in $\mathbb{R}^2$, der diese beiden Punkte verbindet. Begründen Sie, warum das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega$ für alle solche Wege den gleichen Wert annimmt und berechnen Sie es.

**Aufgabe 6**: (2+2+4 )

Es sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ definiert durch

$$\omega(x,y,z) := \frac{1}{r^3}(x\ dx + y\ dy + z\ dz)$$

mit $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben als $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{3}\sin\frac{t}{2} \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie eine Funktion $F_\omega \in \Omega^0(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit $dF_\omega = \omega$ an.

b) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um zu zeigen, dass

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

c) Berechnen Sie nun das Integral $\int_\gamma \omega$ für den eingeschränkten Definitionsbereich $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}$.

**Aufgabe 7**: (2+6 )

Wir betrachten die Funktion $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden iterierten Integrale

$$\int_{-1}^{1} \left( \int_{-1}^{1} f(x,y)\ dy \right)\ dx \text{ und } \int_{-1}^{1} \left( \int_{-1}^{1} f(x,y)\ dx \right)\ dy$$

gleich sind und berechnen Sie deren Wert.

b) Nun sollen Sie zeigen, dass $f$ auf $[-1,1]^2$ **nicht** integrierbar ist. Dazu nehmen Sie an, dass $f$ integrierbar wäre. Dann müsste $f$ auch auf $[0,1]^2$ integrierbar sein und damit nach dem Satz von Fubini auch die Funktion

$$g(x) := \int_0^1 f(x,y)\ dy$$

auf $[0,1]$. Berechnen Sie $g$ für $x \neq 0$. Ist $g$ integrierbar auf $[0,1]$? (Die (Nicht-) Integrierbarkeit elementarer Funktionen können Sie als bekannt voraussetzen.) Was bedeutet das für die Integrierbarkeit von f über $[-1,1]^2$? Wieso widerspricht das zusammen mit dem Ergebnis von Aufgabenteil a) nicht dem Satz von Fubini?

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 8**: (4 )

Als Schwerpunkt einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen $V$ definiert man den Punkt $S := (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$s_i := \frac{1}{V} \int_K x_i \; dx_1 \ldots dx_n, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt der Menge $K$ gegeben durch

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, \; x + y \leq 1, \; x + z \leq 1\}.$$

**Aufgabe 9**: (2+4+2 )

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_k(x) := \frac{\sin(\frac{x}{k})}{1 + x^2}.$$

a) Berechnen Sie den punktweisen Limes $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$.

b) Finden Sie eine (möglichst einfache) gemeinsame Majorante $g \in L^1([0, \infty))$ zu den $f_k$, d.h. eine integrierbare Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, so dass $|f_k(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [0, \infty)$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Benutzen Sie den Satz von Lebesgue, um das Integral $\lim_{k\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_k(x) \; dx$ zu berechnen.

**Aufgabe 10**: (3+2+2+3 )

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_k(x) := |x| \sqrt[k]{1 - x^2}.$$

a) Berechnen Sie den punktweisen Limes $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$.

b) Finden Sie eine (möglichst einfache) gemeinsame Majorante $g \in L^1([-1, 1])$ zu $f_k$, d.h. eine integrierbare Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, so dass $|f_k(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [-1, 1]$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Benutzen Sie den Satz über die majorisierte Konvergenz, um zu zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} \int_{[-1,1]} f_k(x) \; dx = 1$.

d) Überprüfen Sie das Ergebnis aus c) durch explizite Berechnung von $\lim_{k\to\infty} \int_{[-1,1]} f_k(x) \; dx$.

---

**Hinweis:**

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \; dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \qquad \text{mit} \qquad \arctan : (-\infty, \infty) \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

---

**Viel Erfolg!**