1)
$$\omega_\lambda = (\lambda x y - z^3)\, dx + (\lambda-2)\, x^2\, dy + (1-\lambda)\, x z^2\, dz$$

a)
$$d\omega_\lambda = \lambda x \; dy \wedge dx \; - 3z^2 \; dz \wedge dx$$
$$2(\lambda-2)\, x \; dx \wedge dy$$
$$+ (1-\lambda)\, z^2 \; dx \wedge dz$$

$$= (2\lambda x - \lambda x - 4x)\; dx \wedge dy$$
$$+ (z^2 - \lambda z^2 + 3z^2)\; dx \wedge dz$$

$$= (\lambda x - 4x)\; dx \wedge dy$$
$$+ (4z^2 - \lambda z^2)\; dx \wedge dz$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_0 := 4 \quad \Rightarrow \quad d\omega_{\lambda_0} = 0$$

Für $\lambda_0 = 4$ ist ω_{λ_0} geschlossen

b)
$$\omega_{\lambda_0} = (4xy - z^3)\; dx + 2x^2\, dy - 3xz^2\; dz$$

Setze $F := 2x^2 y - x z^3$

Dann ist
$$dF = 4xy\; dx + 2x^2\; dy - z^3 dx - 3xz^2 dz$$
$$= (4xy - z^3)\, dx + 2x^2 dy - 3xz^2 dz$$
$$= \omega_{\lambda_0}$$

Also ist ω_{λ_0} exakt

2)

a) $\omega = \frac{z}{x^2+y^2}(y\,dx - x\,dy)$

$$\phi^*\omega = \frac{\sin t}{(\cos^2 s \cos^2 t + \sin^2 s \cdot \cos^2 t)}\Big(\sin s \cos t \; d(\cos s \cos t) - \cos s \cos t \; d(\sin s \cos t)\Big)$$

$$= \frac{\sin t}{\cos^2 t}\Big(-\sin^2 s \cos^2 t \; ds - \sin s \cos s \cos t \sin t \; dt - \cos^2 s \cos^2 t \; ds + \cos s \sin s \cos t \sin t \; dt\Big)$$

$$= -\frac{\sin t}{\cos^2 t}\cos^2 t \; ds = -\sin t \, ds$$

b) $$d\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\,dz\wedge dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dz\wedge dy + \left(\frac{z}{x^2+y^2} - \frac{2z\,y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dy\wedge dx - \left(\frac{z}{x^2+y^2} - \frac{2z\,x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dx\wedge dy$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\wedge dz - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\wedge dz - \left(\frac{2z}{x^2+y^2} - \frac{2z\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) dx\wedge dy$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\wedge dz - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\wedge dz$$

$$\phi^*(d\omega) = \frac{\cos s \cos t}{\cos^2 t}\, d(\sin s \cos t)\wedge d(\sin t) - \frac{\sin s \cos t}{\cos^2 t}\, d(\cos s \cos t)\wedge d(\sin t)$$

$$= \frac{\cos s}{\cos t}(\cos s \cos t \; ds - \sin s \sin t \; dt)\wedge(\cos t \; dt) - \frac{\sin s}{\cos t}(-\sin s \cos t \, ds - \cos s \sin t \, dt)\wedge(\cos t \, dt)$$

$$= \frac{\cos s}{\cos t} \cos s \cos^2 t \; ds \wedge dt$$

$$+ \frac{\sin s}{\cos t} \sin s \cos^2 t \; ds \wedge dt$$

$$= \cos t \; ds \wedge dt$$

$$d(\phi^* \omega) = d(-\sin t \; ds) = -\cos t \; dt \wedge ds$$

$$= \cos t \; ds \wedge dt = \phi^*(d\omega)$$

3)

a) $$D\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ -2r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D\varphi^T D\varphi = \begin{pmatrix} 1+4r^2 & \overbrace{-r\cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\sin\theta}^{=0} \\ \underbrace{-r\cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\sin\theta}_{=0} & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(D\varphi^T D\varphi) = r^2(1+4r^2)$$

b) $$\int_V f \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f \circ \varphi \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)} \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r^2) \sqrt{\frac{1}{4} + r^2} \cdot r\sqrt{1+4r^2} \, d\theta \, dr$$

$$= \cancel{2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(1-4r^2)(r-r^3)} \, dr$$

$$= \pi \int_0^1 \cancel{(r-5r^3+4r^5)\,dr = \pi\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{5}{4}r^4 + \frac{2}{3}r^6\right]_0^1}$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{5}{4} + \frac{2}{3}\right) = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}}\right)$$

$$= -\cancel{\frac{\pi}{12}}$$

4)

2 a) $\omega = x e^{-y^2} dx + (x^2 y^2 - x^2 y e^{-y^2}) dy$

$d\omega = -2xye^{-y^2} dy \wedge dx + (2xy^2 - 2xye^{-y^2}) dx \wedge dy$

$= 2xy^2 \; dx \wedge dy$

1 $\int_\gamma \omega = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} d\omega = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} 2xy^2 \; dx\, dy$

$= \int_{-a}^{a} 2y^2 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-a}^{a} dy$

$= 0$

5) 2 $\omega = (1+2x)\, dx \wedge dz + x^2 z \; dy \wedge dz$

$d\omega = +2x\, dy \wedge dx \wedge dz + 2xz \; dx \wedge dy \wedge dz$

$= (2xz - 2x)\; dx \wedge dy \wedge dz$

2 $\int_\gamma \omega = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{3} (2xz - 2x) \; dz\, dy\, dx$

$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[xz^2 - 2xz\right]_0^3 \; dy\, dx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3x \; dy\, dx$

$= \int_{-1}^{1} 6\sqrt{1-x^2}\,x \; dx = \cancel{6\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}}$

$= 0$ $\quad \cancel{= 6 \cdot \frac{1}{3} = 2}$

$-6\left(-\frac{1}{3}\,1\right) = \underline{2}$

5)

$\omega = x\,dx + y\,dy$

$d\omega = 0$, Also ω geschlossen

Setze $F := \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, dann ist

$dF = x\,dx + y\,dy = \omega$, also ist ω exakt.

γ ist ein beliebiger Weg von z_0 nach z_1, also ist der Rand

von γ : $\partial\gamma = \{(0,0),(2,1)\}$.

Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF = \int_{\{(0,0),(2,1)\}} F = F(2,1) - F(0,0) = \emptyset + (2+0{,}5)$$
$$= +2{,}5$$

Damit ist der Wert des Integrals ~~von~~ nur von den Endpunkten von γ abhängig und nimmt für jedes γ mit $\partial\gamma = \{z_0, z_1\}$ denselben Wert an.

6)

a) Setze $F_\omega = -\frac{1}{r}$, dann ist

$$dF_\omega = +\frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\,2x\,dx + \frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\,2y\,dy + \frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\,2z\,dz$$

$$= \frac{1}{r^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = \omega$$

b) 1. Möglichkeit: Da ω exakt ist (aus a) bekannt), gilt $d\omega = 0$. Außerdem ist $\gamma(0) = \gamma(4\pi)$, also ist γ eine geschlossene Kurve und ~~st.~~ Rand eines Gebietes $D \subset \mathbb{R}^2$. Also gilt nach Satz von Stokes:

$$\int_\gamma \omega = \int_D d\omega = 0 \qquad \text{mit } \partial D = \gamma$$

2. Möglichkeit: ~~Der Rand von γ ist $\partial\gamma = \{0, 4\pi\}$. Nach dem Satz von Stokes gilt:~~

$$\cancel{\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF_\omega = \int_{\partial\gamma} F_\omega = F(0) - F(}$$

Der Rand von γ ist $\partial\gamma = \{(1,0,0), (1,0,0)\}$. Nach dem Satz von Stokes gilt:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF_\omega = \int_{\partial\gamma} F_\omega = F((1,0,0)) - F((1,0,0)) = 0$$

c) Nun ist der Rand von γ : $\partial\gamma = \{(1,0,0), (-1,0,\boxed{3})\}$

Also mit Stokes:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF_\omega = \int_{\partial\gamma} F_\omega = -F_\omega((1,0,0)) + F_\omega((-1,0,\boxed{3}))$$

$$= \perp \frac{1}{1} \cancel{+} \frac{1}{\sqrt{1+3}} = -\frac{1}{\sqrt{4}} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = +\frac{1}{2}$$

1)

a) Für $x \in [-1,1]$ ist die Fkt $[-1,1] \ni y \to f(x,y)$ stetig und ungerade, daher

$$\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx = 0$$

Ebenso für x, y vertauscht

Oder ausrechnen:

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1} \left[-\frac{1}{2}\frac{y}{(x^2+y^2)}\right]_{-1}^{1} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} 0\,dy = 0$$

Das andere genauso

b) Für $x \neq 0$ gilt

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+y^2)}\right]_0^1$$

$$= +\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)}$$

$\frac{1}{x}$ ist auf $[0,1]$ nicht integrierbar. Also ist auch g auf $[0,1]$ nicht itegrierbar und ~~damit~~ das ist ein Widerspruch zur Annahme $\Rightarrow$ f ist auf $[0,1]^2$ nicht integrierbar.

Der Satz von Fubini sagt, dass für $f \in L^1([-1,1]^2)$ die beiden iterierten Integrale existieren und gleich sind. Umgekehrt folgt aus Existenz und ~~Integr~~ Gleichheit der iterierten Integrale nicht $f \in L^1([-1,1]^2)$

8)

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x} dz\, dy\, dx = \int_0^1 (1-x)^2\, dx$$

$$= \left[x - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$S_x = 3 \cdot \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x} x \; dz\, dy\, dx$$

$$= 3 \cdot \int_0^1 (1-x)^2 \cdot x\, dx = 3 \cdot \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\, dx$$

$$= 3 \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$S_y = 3 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x} y \; dz\, dy\, dx = 3 \cdot \int_0^1 (1-x) \cdot \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx$$

$$= 3 \cdot \int_0^1 (1-x) \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^2\, dx = 3 \cdot \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - 3x + 3x^2 - x^3)\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$S_z = S_y$$

$$\Rightarrow \quad S = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$$

9)

a) $f_k(x) = \dfrac{\sin(\frac{x}{k})}{1+x^2}$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x}{k} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \sin(\frac{x}{k}) \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sin(\frac{x}{k})}{1+x^2} \to 0 \quad$ für $x \in [0,\infty)$

b) Setze $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, dann ist

$\left|\dfrac{\sin(\frac{x}{k})}{1+x^2}\right| = \dfrac{|\sin(\frac{x}{k})|}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} = g(x)$

wegen $|\sin(\frac{x}{k})| \leq 1 \quad \forall\, x \in [0,\infty),\ k \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{1+x^2}$ ist integrierbar, also $g(x) \in L^1([0,\infty))$
(siehe Hinweis):

$\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = [\arctan x]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$

c) Da $g(x)$ aus b) eine Majorante aus $L^1([0,\infty))$ ~~un~~ ist und nach a) der punktweise Limes $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\ \forall x$ existiert, gilt nach Satz von Lebesgue:

$\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_0^\infty f_k(x)\,dx = \int\limits_0^\infty \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int\limits_0^\infty 0\,dx = 0$

10)

a) $f_k(x) = |x| \sqrt[k]{1-x^2}$

Für $x \in (-1,1)$ ist $1-x^2 \leq 1$,

also $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{1-x^2} = 1$

Für $x = -1, 1$ ist $1-x^2 = 0$,

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{1-x^2} = 0$

Insgesamt:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{für } x = -1, 1 \end{cases}$$

b) Für $x \in [-1,1]$ ist $|x| \leq 1$ und

$\sqrt[k]{1-x^2} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Also ist z.B. $g(x) := \mathbb{1}_{[-1,1]}$ eine Majorante aus $L^1([-1,1])$

c) Der punktweise Limes existiert und es gibt eine Majorante aus $L^1([-1,1])$, also nach Satz von Lebesgue:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} f_k(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$$

d) $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} f_k(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\int_{-1}^{0} -x\,(1-x^2)^{\frac{1}{k}}\,dx + \int_{0}^{1} x\,(1-x^2)^{\frac{1}{k}}\,dx \right) = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\left[\frac{1}{2}\frac{k}{k+1}(1-x^2)^{\frac{1+k}{k}} \right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{2}\frac{k}{k+1}(1-x^2)^{\frac{1+k}{k}} \right]_{0}^{1} \right) = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{k}{k+1} \right)$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$