Lösungsvorschläge zu Blatt 5

Aufgabe 2

a) Wir setzen

$$\varphi_k := \sum_{i=1}^{k} f\left(\frac{i-1}{k}\right) \mathbb{1}_{Q_{i,k}}$$

mit $Q_{i,k} := [(i-1)/k, i/k)$. Außerdem sei

$$\psi_k := \sum_{i=1}^{k} \left[f\left(\frac{i}{k}\right) - f\left(\frac{i-1}{k}\right) \right] \mathbb{1}_{\tilde{Q}_{i,k}} + f(1)\mathbb{1}_{\{1\}}$$

mit $\tilde{Q}_{i,k} := ((i-1)/k, i/k)$. Dann gilt offensichtlich

$$|f(x) - \varphi_k(x)| \le \psi_k(x)$$

für alle $x \in [0,1]$, also ist ψ_k Hüllreihe von $f - \varphi_k$. Man beachte, dass für $x = i/k$, $i = 0, 1, \ldots k-1$ gilt $|f(x) - \varphi_k(x)| = 0$. Nun ist zu zeigen, dass $\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0$. Es ist

$$\begin{aligned}
I_1(\psi_k) &= \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\frac{i}{k}\right)^3 - \left(\frac{i-1}{k}\right)^3 \right] \lambda^1\left(Q_{i,k}\right) + f(1)\lambda^1(\{1\}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{3i^2 - 3i + 1}{k^3} \right] \frac{1}{k} + 0 \\
&= \frac{1}{k^4} \sum_{i=1}^{k} (3i^2 - 3i + 1).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{k\to\infty} I_1(\psi_k) = \frac{1}{k^4}\mathcal{O}(k^3) = 0.$$

Also ist wegen $\|f - \varphi_k\|_1 \le I_1(\psi_k)$ auch

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0.$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} f(x)\, dx &:= \lim_{k\to\infty} I_1(\varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{(i-1)^3}{k^3} \right] \frac{1}{k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{i^3 - 3i^2 + 3i - 1}{k^4} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^4} \left(\sum_{i=1}^{k} i^3 + \mathcal{O}(k^3) \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2(k+1)^2}{4k^4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Behauptung: Die Funktion f_1 ist Lebesgue-integrierbar. Dazu betrachte die konstante Null-Treppenfunktion $\varphi := 0$. Es ist zu zeigen, dass $\|f_1\|_1 = 0$. Nach Definition der $\|.\|_1$-Halbnorm ist $\|f_1\|_1 = \inf\{I_1(H) \mid H$ ist Hüllreihe von $f_1\}$. Betrachte die Hüllreihe $H_k := \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{1}_{(-\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i})}$. Es gilt tatsächlich $H_k(x) \geq |f_1(x)|$ für alle x. Außerdem ist $I_1(H_k) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{2^i} = \frac{4}{k}$ und damit $\inf\{I_1(H)\} = 0$.

b) Behauptung: Die Funktion f_2 ist nicht Lebesgue-integrierbar. Angenommen, sie wäre es doch. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen φ_k und Hüllreihen H_k von $f_2 - \varphi_k$ mit $I_1(H_k) < \infty$. Es ist aber $|f(x) - \varphi_k(x)| = \infty$ für $x \in [-1, 1]$ und für alle $k \in \mathbb{N}$, denn Treppenfunktionen können nur reelle Werte annehmen. Also ist $H_k(x) = \infty$ für $x \in [-1, 1]$ und jede Hüllreihe H_k von $f_2 - \varphi_k$. Damit ist $I_1(H_k) = \infty$, Widerspruch.

c) Behauptung: Die Funktion f_3 ist nicht Lebesgue-integrierbar. Angenommen, sie wäre es doch. Dann gibt es wieder eine Folge von Treppenfunktionen φ_k und Hüllreihen H_k von $f_3 - \varphi_k$ mit $I_1(H_k) < \infty$. Für jede Treppenfunktion φ_k ist die Menge $S_k := \{x \mid \varphi_k(x) \neq 0\}$ beschränkt, da Treppenfunktionen nur auf endlich vielen beschränkten Quadern von Null verschiedene Werte annehmen. Also gilt $|\varphi_k(x) - f_3(x)| = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^+ \setminus S_k$. Damit gilt auch $H_k(x) \geq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^+ \setminus S_k$ und alle Hüllreihen von $f_3 - \varphi_k$ und $I_1(H_k) \geq I_1(\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus S_k}) = \infty$, Widerspruch.