1. $\omega(x,y,z) = (x+z^2)\, dx \wedge dy - 2xz\, dy \wedge dz - dx \wedge dz$

a) $d\omega(x,y,z) = 2z\, dz \wedge dx \wedge dy - 2z\, dx \wedge dy \wedge dz - 0$

$= 2z\, dx \wedge dy \wedge dz - 2z\, dx \wedge dy \wedge dz$

$= (2z - 2z)\, dx \wedge dy \wedge dz = 0$

$\Rightarrow$ ω ist geschlossen.

b) Setze $F_\omega = \left(\frac{1}{2}x^2 + xz^2\right) dy - x\, dz$

Dann ist

$$dF_\omega = (x + z^2)\, dx \wedge dy + 2xz\, dz \wedge dy - dx \wedge dz$$

$$= (x + z^2)\, dx \wedge dy - 2xz\, dy \wedge dz - dx \wedge dz$$

$$= \omega$$

ω ist exakt.

2. a)

$$\omega = \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

$$\phi^* \omega = \frac{-r \sin t \; d(r\cos t) + r \cos t \; d(r \sin t)}{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \Big(-r \sin t \, (\cos t \, dr - r \sin t \, dt) + r \cos t \, (\sin t \, dr + r \cos t \, dt) \Big)$$

$$= \frac{1}{r^2} \Big((-r \sin t \cos t + r \cos t \sin t) \, dr + (r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t) \, dt \Big)$$

$$= \frac{1}{r^2} \big(0 + r^2 \, dt \big) = dt$$

b) ω ist 1-Form, $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3) \Rightarrow d\omega$ ist 2-Form, $d\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, also ist $f^* d\omega$ eine 2-Form auf $\mathbb{R}$, $f^* d\omega \in \Omega^2(\mathbb{R})$. Die einzige 2-Form auf $\mathbb{R}$ ist die 0, also $f^* d\omega = 0$.

Alternativ kann man zeigen, dass

$f^*(dx \wedge dy)(t) = g(t) \, dt \wedge dt = 0$ mit irgendeinem $g(t)$.

analog für $f^*(dx \wedge dz)$, $f^*(dy \wedge dz)$.

3. a)

$$\varphi(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} t_1 \\ \sin t_2 \\ 2t_1 \sin t_2 \end{pmatrix}$$

$$D\varphi(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos t_2 \\ 2\sin t_2 & 2t_1 \cos t_2 \end{pmatrix}$$

$$(D\varphi)^t D\varphi = \begin{pmatrix} 1 + 4\sin^2 t_2 & 4t_1 \sin t_2 \cos t_2 \\ 4t_1 \sin t_2 \cos t_2 & \cos^2 t_2 + 4t_1^2 \cos^2 t_2 \end{pmatrix}$$

$$\det((D\varphi)^t D\varphi) = (1 + 4\sin^2 t_2) \cdot (\cos^2 t_2 + 4t_1^2 \cos^2 t_2) - 16t_1^2 \sin^2 t_2 \cos^2 t_2$$

$$= \cos^2 t_2 + 4t_1^2 \cos^2 t_2 + 4\sin^2 t_2 \cos^2 t_2 + 16t_1^2 \sin^2 t_2 \cos^2 t_2 - 16t_1^2 \sin^2 t_2 \cos^2 t_2$$

$$= \cos^2 t_2 (1 + 4t_1^2 + 4\sin^2 t_2)$$

b)

$$\varphi(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} t_1 \cos(2t_2) \\ t_1 \sin(2t_2) \\ t_1 \cos(t_2) \end{pmatrix}$$

$$D\varphi(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \cos(2t_2) & -2t_1 \sin(2t_2) \\ \sin(2t_2) & 2t_1 \cos(2t_2) \\ \cos(t_2) & -t_1 \sin(t_2) \end{pmatrix}$$

$$(D\varphi)^t D\varphi = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 t_2 & -t_1 \sin t_2 \cos t_2 \\ -t_1 \sin t_2 \cos t_2 & 4t_1^2 + t_1^2 \sin^2(t_2) \end{pmatrix}$$

$$\det((D\varphi)^t D\varphi) = (1 + \cos^2 t_2)(4t_1^2 + t_1^2 \sin^2 t_2) - t_1^2 \sin^2 t_2 \cos^2 t_2$$

$$= 4t_1^2 + t_1^2 \sin^2 t_2 + 4t_1^2 \cos^2 t_2 + t_1^2 \sin^2 t_2 \cos^2 t_2 - t_1^2 \sin^2 t_2 \cos^2 t_2$$

$$= 4t_1^2 + 3t_1^2 \cos^2 t_2 + t_1^2 (\sin^2 t_2 + \cos^2 t_2)$$

$$= t_1^2 (5 + 3\cos^2 t_2)$$

4. $\omega = y^2\, dx + x\, dy \quad \Rightarrow \quad d\omega = (1-2y)\, dx \wedge dy$

a)
$$\int_\gamma \omega = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} d\omega = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} (1-2y)\, dx\, dy$$
$$= 4 \cdot \int_{-2}^{2} (1-2y)\, dy = 4\,\left[y - y^2\right]_{-2}^{2} = 4 \cdot 4 = \underline{\underline{16}}$$

b) Sei $\varphi : [0,2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$$\varphi := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\left((D\varphi)^t D\varphi\right) = r^2$$

Also
$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \varphi^* d\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (1 - 2r\sin t) \cdot r\, dr\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{2}{3} r^3 \sin t\right]_0^2 dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{16}{3}\sin t\right) dt$$
$$= \left[2t + \frac{16}{3}\cos t\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{4\pi}}$$

5. Ein geschlossener Weg γ ist immer Rand eines Gebietes. Also: Es gibt ein Gebiet D, sodass $\partial D = \gamma$. Dann gilt nach dem Satz v. Stokes:

$$\int_\gamma \omega = \int_D d\omega$$

Mit $\omega = x\,dy + y\,dx$ folgt

$$d\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dx = dx \wedge dy - dx \wedge dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_\gamma \omega = \int_D d\omega = 0$$

6

a) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (2xy + z^3)\,dx + x^2\,dy + 3xz^2\,dz$$

$$= \int_0^1 (2t^3 + t^{12})\,dt + 2t^3\,dt + 3 \cdot 4\, t^9 \cdot t^3\,dt$$

$$= \int_0^1 (4t^3 + 13t^{12})\,dt = \left[t^4 + t^{13}\right]_0^1 = \underline{\underline{2}}$$

b) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma x\,dy - y\,dx$$

$$= \int_0^1 e^t \cos t \; d(e^t \sin t) - e^t \sin t \; d(e^t \cos t)$$

$$= \int_0^1 e^t \cos t \cdot (e^t \sin t + e^t \cos t)\,dt - e^t \sin t \cdot (e^t \cos t - e^t \sin t)\,dt$$

$$= \int_0^1 e^{2t} \left(\cos t \sin t + \cos^2 t - \sin t \cos t + \sin^2 t\right)\,dt$$

$$= \int_0^1 e^{2t} \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\,dt = \int_0^1 e^{2t}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2t}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)}}$$

17. Volumen des Halbzylinders:

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx\,dz$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,dz = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right]_{-1}^{1} dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) dz = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

Schwerpunkt:

$$S_x = \frac{1}{V}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x\;dy\,dx\,dz = \frac{1}{V}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx\,dz$$

$$= \frac{1}{V}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} dz = \underline{\underline{0}}$$

$$S_y = \frac{1}{V}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y\;dy\,dx\,dz = \frac{1}{V}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dx\,dz$$

$$= \frac{1}{V}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)\,dx\,dz = \frac{1}{V}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{V}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)\right) dz = \frac{1}{V}\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}\,dz$$

$$= \frac{1}{V}\,2\cdot\frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3\pi}}}$$

$$S_z = \frac{1}{V} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} z \; dy\,dx\,dz$$

$$= \frac{1}{V} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} z \sqrt{1-x^2} \; dx\,dz$$

$$= \frac{1}{V} \int_{-1}^{1} \cancel{\int} z \cdot \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right]_{-1}^{1} dz$$

$$= \frac{1}{V} \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2} \cdot z \; dz = \frac{1}{V} \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{-1}^{1}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.

a) $$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{1}{y^2}\,dx - \int_y^1 \frac{1}{x^2}\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\left[\frac{x}{y^2} \right]_0^y + \left[\frac{1}{x} \right]_y^1 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y} \right) dy = \int_0^1 1\,dy = \underline{\underline{1}}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^x -\frac{1}{x^2}\,dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\left[\frac{y}{x^2} \right]_0^x - \left[\frac{1}{y} \right]_x^1 \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x} - \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right) dx = \int_0^1 -1\,dx = \underline{\underline{-1}}$$

b) Da $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy \neq \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$ ist nach <u>Fubini</u> $f(x,y)$ über $[0,1]^2$ <u>nicht</u> integrierbar.

9.

a) $f_k(x) = (1-|x|)^k$

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt: $(1-|x|) < 1$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} (1-|x|)^k = 0$

Für $x = 0$ ist $(1-|x|)^k = 1$

Also $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-1,1]\setminus\{0\} \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

b) Da $f_k(x) \leq 1 \quad \forall x \in [-1,1], \forall k \in \mathbb{N}$,

setze $g(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ (charakteristische Fkt.)

g hat kompakten Träger und ist beschränkt $\Rightarrow g \in L^1([-1,1])$

c) Die f_k sind aus $L^1([-1,1])$ (kompakter Träger + beschränkt)

g aus b) ist Majorante aus $L^1([-1,1])$, daher gilt nach Satz von Lebesgue:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} f_k(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = 0$$

$\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ ist nur auf eine Nullmenge $\neq 0$.

d) $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{-1}^{1} (1-|x|)^k \, dx$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \left(\int_{-1}^{0} (1+x)^k \, dx + \int_{0}^{1} (1-x)^k \, dx \right)$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \left(\left[\frac{1}{k+1} (1+x)^{k+1} \right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{k+1} (1-x)^{k+1} \right]_{0}^{1} \right)$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} \right) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0$

10. a) Da $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ und $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0$,

ist $$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Setze $$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x \in (0,1] \end{cases}$$

Dann ist $|f_k(x)| = f_k(x) \leq g(x) \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]$.

Denn • für $x \in [\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}]$ ist $f_k(x) \leq k$ und $g(x) \geq k$, da g monoton fallend ($g'(x) < 0$) und $g(\frac{1}{k}) = k$ ist.

• für $x \in [0,1] \setminus [\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}]$ ist $f_k(x) = 0$ und $g(x) > 0$, also $f_k(x) \leq g(x)$

• für $x = 0$ ist $f_k(x) = g(x) = 0$, also auch $f_k(x) \leq g(x)$.

Beachte, dass ~~f_k~~ $f_k(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, nur $\lim_{k\to\infty} f_k(0) \neq 0$.

c) $\cdot$ $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_0^1 f_k(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty} \left(k \cdot \lambda^1\left(\left[\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right]\right)\right)$

$= \lim\limits_{k\to\infty} \left(k \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \underline{\underline{1}}$

$\cdot$ $\int\limits_0^1 \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = 0$, da $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) \neq 0$ nur für $x = 0$ und $\{0\}$ eine λ^1-Nullmenge ist.

Der Satz von Lebesgue ist nicht anwendbar, da $g(x)$ aus b) $\notin L^1([0,1])$ ist. ($\frac{1}{x}$ ist nicht integrierbar auf $(0,1]$!).