Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

19.07.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Klausur

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
max. Punkte	4	8	8	7	3	30
Punkte						

Aufgabe	6	7	8	9	10	$\sum$
max. Punkte	6	6	8	10	10	40
Punkte						

Gesamt (max 70): ....

Aufgabe 1: (2+2)

Sei $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ definiert durch $\omega(x,y,z) := (x+z^2)\ dx \wedge dy - 2xz\ dy \wedge dz - dx \wedge dz$.

a) Ist ω geschlossen?

b) Ist ω exakt? Falls ja, geben Sie F_ω mit $dF_\omega = \omega$ an.

Aufgabe 2: (4+4)

a) Es sei $\omega := \frac{-y\ dx + x\ dy}{x^2+y^2}$ die sogenannte Windungsform auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\Phi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\Phi(r,t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Zurückziehung $\Phi^*\omega$.

b) Nun sei die Form $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$\omega(x,y,z) := \ln\left(1 + x^2 + e^y\cos(z^4)\right)\ dx + e^{\cos(xy)}\sqrt{1+\ln(1+z^4)}\ dy + \frac{1}{2}(e^{xyz} + e^{-xyz})\ dz.$$

Weiter sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ t^4 + 25t^3 + \sqrt{3}t^2 + \pi t + e^1 \\ e^{\sin(t)} \ln\left(\sqrt{1 + (\cos(t))^{50}}\right) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Zurückziehung $f^*d\omega$.

(Tipp zu b): Vermeiden Sie längere Rechnungen! Die Begründung sollte nur wenige Zeilen benötigen.)

Aufgabe 3: (4+4)

Berechnen Sie die Gramsche Determinante folgender Abbildungen:

a) Sei $\varphi : [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to V \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(t_1, t_2) := \begin{pmatrix} t_1 \\ \sin(t_2) \\ 2t_1\sin(t_2) \end{pmatrix}.$$

b) Nun sei $\varphi : [0,1] \times [0, 2\pi] \to V \subset \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(t_1, t_2) := \begin{pmatrix} t_1\cos(2t_2) \\ t_1\sin(2t_2) \\ t_1\cos(t_2) \end{pmatrix}.$$

Fortsetzung auf Seite 3!

Aufgabe 4: (3+4)

Benutzen Sie den Satz von Stokes, um das jeweilige Kurvenintegral $\int_\gamma y^2 \; dx + x \; dy$ zu bestimmen.

a) γ ist das Quadrat mit den Ecken $(\pm 2, \pm 2)$,

b) γ ist die Kreislinie mit Radius 2 um den Nullpunkt.

Aufgabe 5: (3)

Begründen Sie, warum für geschlossene Wege γ in $\mathbb{R}^2$ das Kurvenintegral $\int_\gamma x \; dy + y \; dx$ immer gleich 0 ist.

Aufgabe 6: (3+3)

Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale $\int_\gamma \omega$:

a) Es seien $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ und $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ definiert durch

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \omega(x,y,z) := (2xy + z^3) \; dx + x^2 \; dy + 3xz^2 \; dz.$$

b) Nun seien $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ und $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \omega(x,y) := x \; dy - y \; dx.$$

Aufgabe 7: (6)

Als Schwerpunkt einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen V definiert man den Punkt $S := (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$s_i := \frac{1}{V} \int_K x_i \; dx_1 \ldots dx_n, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Halbzylinders

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| \leq 1, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Aufgabe 8: (6+2)

Die Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{falls } 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{falls } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Berechnen Sie die Integrale $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \; dxdy$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \; dydx$.

b) Ist f über $[0,1]^2$ integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals an.

Bitte wenden!

Aufgabe 9: (3+2+2+3)

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_k(x) := (1 - |x|)^k.$$

a) Berechnen Sie den punktweisen Limes $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$.

b) Finden Sie eine (möglichst einfache) gemeinsame Majorante $g \in L^1([-1,1])$ zu f_k, d.h. eine integrierbare Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, so dass $|f_k(x)| \le g(x)$ für alle $x \in [-1,1]$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Benutzen Sie den Satz über die majorisierte Konvergenz, um zu zeigen, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[-1,1]} f_k(x)\ dx = 0.$$

d) Überprüfen Sie das Ergebnis aus c) durch explizite Berechnung von

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[-1,1]} f_k(x)\ dx.$$

Aufgabe 10: (2+4+4)

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} k & \text{falls} \quad x \in I_k := [\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Berechnen Sie den punktweisen Limes $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$.

b) Finden Sie eine (möglichst einfache) gemeinsame Majorante g zu f_k, d.h. eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass $|f_k(x)| \le g(x)$ für alle $x \in [0,1]$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Zeigen Sie

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k(x)\ dx \neq \int_{[0,1]} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\ dx.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Satz über die majorisierte Konvergenz?

Einige nützliche Formeln:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Viel Erfolg!