Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

17.06.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Aufgabenblatt 9

Abgabe der Lösungen am 26.06.2008 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (2+2+2+2+2 Punkte)

Wir studieren das von der Kugel $B_R := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \le R\}$ erzeugte (gravitations oder elektrische) Potential. Es sei $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ die stetige Dichte der Kugel. Wir nehmen an, dass die Dichte kugelsymmetrisch ist, d.h. $\rho(x) = \tilde{\rho}(\|x\|)$ für ein $\tilde{\rho} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$. Das Potential is gegeben durch

$$V(A) := \int_{B_R} \frac{\rho(x)}{\|A - x\|}\, dx \text{ für } A \in \mathbb{R}^3.$$

Es sei $M := \int_{B_R} \rho(x)\, dx$ die Masse von B_R.

a) Erklären Sie, warum gilt $V(A) = V((0, 0, \|A\|))$.

b) Wir nehmen $A = (0, 0, a)$ mit $a > 0$ an. Geben Sie $\|A - (x, y, z)\|$ in Kugelkoordinaten an.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Kugelkoordinaten, dass gilt

$$V(A) = \frac{2\pi}{a} \int_0^R r\tilde{\rho}(r)(r + a - |a - r|)\, dr.$$

d) Wir nehmen $a \ge R$ an. Zeigen Sie, dass gilt $V(A) = \frac{M}{a}$.

e) Nun nehmen wir $0 < a < R$ an. Zeigen Sie, dass gilt

$$V(A) = \frac{4\pi}{a} \left(\int_0^a r^2 \tilde{\rho}(r)\, dr + \int_0^R a r \tilde{\rho}(r)\, dr \right).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 2: (2+2+2+2 Punkte)

Es sei $f : [0, M] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, t) := \sin(x)e^{-xt}$, wobei $M > 0$.

a) Zeigen Sie, dass $f \in L^1([0, M] \times [0, \infty))$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der partiellen Integration $\int_0^M f(x, t)\, dx$ für $t \in (0, \infty)$.

c) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^M \left(\int_0^\infty f(x, t)\, dt \right) dx = \int_0^M \frac{\sin(x)}{x}\, dx.$$

d) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ existiert und gleich $\pi/2$ ist.

Aufgabe 3: (2+2+2 Punkte)

Wir wissen, dass gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Es sei $g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(t) := \frac{\sin^2(nt)}{t^2 + t^3}$$

und $I_n := \int_0^\infty g_n(t)\, dt$.

a) Zeigen Sie, dass $g_n \in L^1(\mathbb{R}^+)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dazu, dass für $G_n(t) := \frac{n^2}{1+t^2}$ $G_n \in L^1(\mathbb{R}^+)$ ist, $|g_n(t)| \leq G_n(t)$ für jedes n gilt.

b) Es sei

$$f_n(t) := \frac{\sin^2(t)}{t^2(1 + t/n)}.$$

Finden Sie $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, so dass $|f_n(t)| \leq f(t)$ fast überall.

c) Zeigen Sie, dass $I_n \sim n\pi/2$, wobei $a_n \sim b_n$, falls $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$.

(Tipp: Machen Sie in I_n die Ersetzung $z := nt$.)

Viel Erfolg!