Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

10.06.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Aufgabenblatt 8

Abgabe der Lösungen am 19.06.2008 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (2+2+2+1 Punkte)

Für $1 \leq n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := \frac{n}{x^2+n^2}$. Zeigen Sie:

a) $0 \leq f_n(x) \leq 1$ für alle x und alle n.

b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle x.

c) $\int_{-\infty}^{\infty} f_n \, dx = \pi$.

Widersprechen diese Aussagen dem Satz von der majorisierten Konvergenz ?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Für $1 \leq n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := n(c - nx)\mathbb{1}_{[0,1/n]}(x)$$

mit $c > 0$. Für welche c stimmen die Grenzwerte

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx$$

überein? Warum ist der Satz von der majorisierten Konvergenz nicht anwendbar?

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (2+2 Punkte)

Es seien $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ und $I := [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mit $\|.\|_\infty$ bezeichnen wir die Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\int_I |f(x)| \, dx \leq C \|f\|_\infty \tag{1}$$

mit $C := |b - a|$.

b) Finden Sie $f \in L^1(\mathbb{R})$, so dass es eine Gleichheit in (1) gibt. Kann man eine bessere Konstante C in (1) finden?

Aufgabe 4: (2+2+2+2 Punkte)

Es sei $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{\sin(x^n)}{x^n} \frac{1}{1 + x^2}.$$

a) Zeigen Sie, dass $|\sin(t)| \leq |t|$, für $t \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie $\lim_{n \to \infty} f_n$.

c) Finden Sie ein $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, so dass $|f_n(x)| \leq f(x)$ fast überall.

d) Berechnen Sie $\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x) \, dx$.

Viel Erfolg!