Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

03.06.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Aufgabenblatt 7

Abgabe der Lösungen am 12.06.2008 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des Durchschnitts der beiden Zylinder

$$Z_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \le r^2\}, \qquad Z_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \le r^2\}.$$

Aufgabe 2: (4+4 Punkte)

a) Aus der Vorlesung kennen Sie bereits die folgende Funktionenfolge: Zu $k \in \mathbb{N}$ seien $\nu, q \in \mathbb{N}_0$ durch $\nu := \lfloor \log_2 k \rfloor$ und $q := k - 2^\nu$ definiert, also $0 \le q < 2^\nu$. Weiterhin sei

$$f_k := \mathbb{1}_{I_k} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad I_k := [q2^{-\nu}, (q+1)2^{-\nu}].$$

Es gilt zwar

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_1 = 0,$$

also konvergiert die Folge im L^1-Sinn gegen $f := 0$, aber der punktweise Limes existiert für kein $x \in [0,1]$.

Konstruieren Sie eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f = 0$ konvergiert.

b) Finden sie eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k \in C^0([0,1])$ (also f_k stetig!), so dass $\|f_k\|_1 = 1$ für alle k ist und die f_k punktweise fast überall gegen die Nullfunktion konvergieren. Gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k \, dx = \int_{[0,1]} \lim_{k\to\infty} f_k \, dx \ ?$$

Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^1(\mathbb{R})$?

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (2+2+2 Punkte)

Es gelte $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ mit Lebesgue-messbaren Mengen M_j und $\lambda^n(M_j \cap M_k) = 0$ für $j \neq k$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ über jedes M_j Lebesgue-integrierbar und die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} f \; dx$ sei absolut konvergent. Dann heißt f Lebesgue-integrierbar über $\mathbb{R}^n$ und die Zahl

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \; dx := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} f \; dx$$

heißt das Lebesguesche Integral von f über $\mathbb{R}^n$.
Überprüfen Sie anhand dieser verallgemeinerten Definition des Lebesgue Integrals, ob die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integriebar sind und berechnen Sie gegebenenfalls $\int_D f \; dx$.

a) $f(x) := e^{-x}$ mit $D := [0, \infty)$

b) $f(x) := \frac{1}{x}$ mit $D := [1, \infty)$

c) $f(x) := \frac{1}{x^2}$ mit $D := [1, \infty)$

Aufgabe 4: (4+2+2 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := x^2 e^{-x^2}$ und die Funktionen $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_\epsilon(x) := \epsilon f(\epsilon x)$.

a) Zeigen Sie, dass $f_\epsilon \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ für alle $\epsilon > 0$ (z.B. mit Hilfe einer Majorante) und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x) \; dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; dx$$

für alle $\epsilon > 0$.

b) Zeigen Sie, dass für $f_0(x) := \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(x)$, $(x \in \mathbb{R})$, $f_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ist, aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x) \; dx \neq \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(x) \; dx.$$

c) Ist $\lim_{\epsilon \to 0} \|f_\epsilon - f_0\|_1 = 0$?

Viel Erfolg!