Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

27.05.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Aufgabenblatt 6

Abgabe der Lösungen am 05.06.2008 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (1+1+1+1 Punkte)

Untersuchen Sie die Mengen

a) $A := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \text{ oder } y \in \mathbb{Q}\}$,

b) $B := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \text{ und } y \in \mathbb{Q}\}$,

c) $C := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \text{ oder } y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$,

d) $D := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x = y\}$

auf ihre Lebesgue-Messbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls deren Lebesgue-Maß λ^2.

Aufgabe 2: (1+1+1+1 Punkte)

Eine Menge $N \subset E := [0,1]^2$ mit $\lambda^2(N) = 0$ heißt (Lebesgue-) Nullmenge. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Alle Nullmengen sind Lebesgue-messbar.

b) Jede abzählbare Teilmenge von E ist eine Nullmenge.

c) Jede Nullmenge von E ist abzählbar.

d) Die Verbindungsstrecke von zwei beliebigen Punkten aus E ist eine Nullmenge.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede messbare Teilmenge $A \subset E := [0,1]^2$ auch $E\backslash A$ messbar ist und außerdem gilt

$$\lambda^2(A) + \lambda^2(E\backslash A) = 1.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4: (2+2+2 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \qquad \int_I \ln(x+y)\; d(x,y), \quad \text{mit } I := [0,1] \times [1,2],$$

$$\text{b)} \qquad \int_I \sin(x+y)\; d(x,y), \quad \text{mit } I := [0,\frac{\pi}{2}]^2,$$

$$\text{c)} \qquad \int_I \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\; d(x,y,z), \quad \text{mit } I := [0,1]^3.$$

Aufgabe 5: (3+3 Punkte)

Als Schwerpunkt einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen V definiert man den Punkt $S := (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$s_i := \frac{1}{V} \int_K x_i \; dx_1 \dots dx_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt

a) des Halbkreises $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ im $\mathbb{R}^2$,

b) eines Kegels $K \subset \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$K := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [0,h] \mid x \in (1 - \frac{y}{h})B \right\},$$

mit einer kompakten Menge $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $h > 0$.

Viel Erfolg!