Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

20.05.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Aufgabenblatt 5

Abgabe der Lösungen am 29.05.2008 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4+2 Punkte)

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei

$$\|f\|_1 := \inf\{\mathcal{I}_n(\varphi) \mid \varphi \text{ ist Hüllreihe von } f\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\|.\|_1$ eine Halbnorm ist, dass also für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gilt

1. $\|f\|_1 \geq 0$,
2. $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$,
3. $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

b) Zeigen Sie (mit einem Gegenbeispiel), dass $\|.\|_1$ tatsächlich keine Norm ist, dass also aus $\|f\|_1 = 0$ nicht $f = 0$ folgt.

Aufgabe 2: (4+2 Punkte)

Gegeben sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^3$.

a) Konstruieren Sie eine Folge φ_k von Treppenfunktionen, für die gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_1 = 0.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_{[1,0]} f(x)\, dx := \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}_1(\varphi_k).$$

(Tipp: Man benötigt evtl. die Relationen $\sum_{i=0}^k i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, $\sum_{i=0}^k i^2 = \frac{2k^3+3k^2+k}{6}$ und $\sum_{i=0}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$.)

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (2+2+2 Punkte)

Überprüfen Sie anhand der Definition der Lebesgue-Integrierbarkeit, ob die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $i = 1, 2, 3$, Lebesgue-integriebar sind:

$$\text{a)} \qquad f_1(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{b)} \qquad f_2(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{für } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

$$\text{c)} \qquad f_3(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4: (2+2+2+2+2 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Weisen Sie nach, dass die Restriktion von f auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ stetig ist.

b) Berechnen Sie die Limites $\lim_{t \to 0} f(t, 0)$ und $\lim_{t \to 0} f(t, t)$. Ist f in $\mathbb{R}^2$ stetig? Ist f Lebesgue-integrierbar auf $[0, 1] \times [0, 1]$?

c) Zeigen Sie, dass $x \to f(x, y)$ für alle $y \in (0, 1)$ Riemann- und Lebesgue-integrierbar in $[0, 1]$ ist.

d) Geben Sie $F_2(y) := \int_0^1 f(x, y)\, dx$ für $y \in (0, 1)$ an und berechnen Sie $\int_0^1 F_2(y)\, dy$.

e) Berechnen Sie nun $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx$.

Viel Erfolg!