Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

06.05.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Aufgabenblatt 4

Abgabe der Lösungen am 20.05.2008 in der Vorlesung (ausnahmsweise dienstags wegen Feiertag).

Aufgabe 1: (2+2+2+2 Punkte)

Mit den Mengen $E := [-1,1] \times [-1,1]$, $E_+ := [0,1]$ und $E_- := [-1,0)$ sei $E_{a,b} := E_a \times E_b$, wobei $a, b \in \{+,-\}$.

a) Zeichnen Sie diese Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.

b) Es sei $g := \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_{E_{+,+}}$, wobei $\mathbb{1}_A$ die charakteristische Funktion der Menge A ist. Kann man g mit Hilfe von $\mathbb{1}_{E_{\pm,\pm}}$ in anderer Form schreiben?

c) Berechnen Sie auf zwei Weisen $\int_E g(x,y)\, dxdy$.

d) Es sei V der Vektorraum gegeben durch

$$\{\lambda_1 \mathbb{1}_{E_{-,-}} + \lambda_2 \mathbb{1}_{E_{+,-}} + \lambda_3 \mathbb{1}_{E_{-,+}} + \lambda_4 \mathbb{1}_{E_{+,+}} + \lambda_5 \mathbb{1}_E,\ \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, 5\}.$$

Geben Sie eine Basis von V an.

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)

Zeigen Sie,

a) dass für beliebige Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$,

b) dass das Produkt zweier Treppenfunktionen $f, g \in \mathcal{T}_n$ wieder eine Treppenfunktion $(f \cdot g) \in \mathcal{T}_n$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (4+2 Punkte)

Seien
$$Q_1 := [0,2] \times [0,2], \quad Q_2 := [1,3] \times (1,3] \text{ und } Q_3 := [0,2] \times [1,3],$$
sowie $f := \mathbb{1}_{Q_1} + 3\mathbb{1}_{Q_2}$ und $g := -2\mathbb{1}_{Q_1} + \mathbb{1}_{Q_3}$.

a) Geben Sie endlich viele disjunkte Quader $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_k \subset \mathbb{R}^2$ und Zahlen $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, \ldots, k$ an, so dass gilt $f = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{1}_{\tilde{Q}_i}$, $g = \sum_{i=1}^k b_i \mathbb{1}_{\tilde{Q}_i}$ und $f \cdot g = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{\tilde{Q}_i}$.

b) Berechnen Sie $\mathcal{I}_2(f)$, $\mathcal{I}_2(g)$ und $\mathcal{I}_2(f \cdot g)$.

Aufgabe 4: (3+5 Punkte)

Wir bezeichnen mit $\mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$ die Menge aller Quader in $\mathbb{R}^n$, d.h.
$$\mathbb{I}(\mathbb{R}^n) := \{I \subset \mathbb{R}^n \mid I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n, \text{ wobei } I_k \text{ beschränktes Intervall in } \mathbb{R}\}.$$
Insbesondere bezeichnet $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ also die Menge aller beschränkten Intervalle in $\mathbb{R}$. Seien nun $I = I_1 \times \ldots \times I_n,\ J = J_1 \times \ldots \times J_n \ \in \mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass

a) $I \cap J \ \in \mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$,

b) $I \cup J \ \in \mathbb{I}(\mathbb{R}^n)$ mit $I \not\subset J$ und $J \not\subset I$ genau dann gilt, wenn für ein $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ $I_{i_0} \cup J_{i_0} \ \in \mathbb{I}(\mathbb{R})$ ist und für alle $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$ gilt $I_i = J_i$.

(Tipp: Schreiben Sie die Mengen $I \cup J$ und $W := W_1 \times \ldots \times W_n = I_1 \cup J_1 \times \ldots \times I_n \cup J_n$ aus, also $I \cup J = \{x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | (x_1 \in I_1 \wedge x_2 \in I_2 \wedge \ldots) \vee (x_1 \in J_1 \wedge \ldots)\}$ und $W = \{x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \cdots\}$. Hierbei stehen $\wedge$ und $\vee$ für die logischen Verknüpfungen *und* bzw. *oder*. Nach geeigneter Umformung der auftretenden Terme vergleichen Sie diese und leiten daraus die angegebenen Bedingungen ab.)

Viel Erfolg!