Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

24.04.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Aufgabenblatt 3

Abgabe der Lösungen am 08.05.2008 in der Vorlesung (**2 Wochen Bearbeitungszeit!**). Ab dem 06.05.2008 werden die Aufgabenblätter dienstags ausgegeben. Die Abgabe der bearbeiteten Aufgaben erfolgt dann immer donnerstags in der darauffolgenden Woche (9 Tage später).

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Differentialformenkalküls, dass für $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ und $X, Y \in C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ gilt:

a) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad}(g) + g \operatorname{grad}(f)$,

b) $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + \langle \operatorname{grad}(f), X\rangle$,

c) $\operatorname{rot}(fX) = f \operatorname{rot}(X) + \operatorname{grad}(f) \times X$,

d) $\operatorname{grad}(\langle X, Y\rangle) = X \times \operatorname{rot}(Y) + \langle X, \operatorname{grad}\rangle Y + Y \times \operatorname{rot}(X) + \langle Y, \operatorname{grad}\rangle X$,

e) $\operatorname{rot}(X \times Y) = X \operatorname{div}(Y) - \langle X, \operatorname{grad}\rangle Y - Y \operatorname{div}(X) + \langle Y, \operatorname{grad}\rangle X$.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Es seien $B \in C^\infty(\mathbb{R}^3_q;\mathbb{R})$ ein ortsabhängiges Magnetfeld und $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3_q \times \mathbb{R}^3_v)$ eine Zweiform gegeben durch

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} dq_i \wedge dv_i + B_1\, dq_2 \wedge dq_3 + B_2\, dq_3 \wedge dq_1 + B_3\, dq_1 \wedge dq_2.$$

a) Berechnen Sie für Vektorfelder $X, Y : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ die Funktion $\omega(X, Y) : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie für $H : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, $H(q, v) := \frac{1}{2}\|v\|^2$ die Einsform dH und $dH(Y)$.

c) Geben Sie die eindeutige Lösung X_H der Gleichung $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$ an, wobei $Y : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$.

d) Schreiben Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = X_H(x)$ in Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten ($x = (q, v) \in \mathbb{R}^3_q \times \mathbb{R}^3_v$), wobei $\dot{x} := \frac{\partial x}{\partial t}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Die Feldstärke $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ sei durch

$$F := B_1\ dx_2 \wedge dx_3 + B_2\ dx_3 \wedge dx_1 + B_3\ dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{i=1}^{3} E_i\ dx_i \wedge dx_4$$

gegeben. Dabei ist $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt im Raum und $t := x_4$ die Zeit. Außerdem bezeichnen $E := (E_1, E_2, E_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^3)$ das elektrische und $B := (B_1, B_2, B_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^3)$ das magnetische Feld.

a) Zeigen Sie, dass die homogene Maxwell-Gleichung $dF = 0$ äquivalent ist zu

$$\mathrm{div}_x(B) = 0, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -\mathrm{rot}_x(E).$$

b) Aus dem Poincaré-Lemma schließen wir auf die Existenz eines sogenannten Eichfeldes $\mathcal{A} \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ mit $F = d\mathcal{A}$ und der Darstellung $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i\ dx_i + \phi\ dx_4$. Berechnen Sie $d\mathcal{A}$ und schreiben Sie das elektrische und das magnetische Feld als Funktionen von $A := (A_1, A_2, A_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^3)$ und $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Die Polarkoordinaten in drei Dimensionen sind gegeben durch

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^+ \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta, \psi) &= r \cos\theta \cos\psi \\ \varphi_2(r, \theta, \psi) &= r \cos\theta \sin\psi \\ \varphi_3(r, \theta, \psi) &= r \sin\theta. \end{aligned}$$

Berechnen Sie

a) $\varphi^* dx$, $\varphi^* dy$, $\varphi^* dz$,

b) $\varphi^* dx \wedge dy$, $\varphi^* dx \wedge dz$, $\varphi^* dy \wedge dz$ und

c) $\varphi^* dx \wedge dy \wedge dz$.

Viel Erfolg!