Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

17.04.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Aufgabenblatt 2

Abgabe der Lösungen am 24.04.2008 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Zeigen Sie,

a) dass für jede 1-Form $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

b) dass man jede k-Form $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ eindeutig als Linearkombination

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k} \; \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}$$

mit den Koeffizienten

$$\omega_{i_1 \ldots i_k} := \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

schreiben kann.

Dabei bezeichnen wir mit $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ diejenige Basis des Dualraumes, für die $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$ gilt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Für $v \in \mathbb{R}^3$ haben Sie bereits in der Vorlesung die durch

$$\omega_v^1(x) := \langle v, x \rangle \qquad \text{und} \qquad \omega_v^2(x_1, x_2) := \det(v, x_1, x_2)$$

definierten Formen $\omega_v^1 \in \Lambda^1(\mathbb{R}3)$ und $\omega_v^2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ kennen gelernt. Zeigen Sie, dass für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\omega_v^1 \wedge \omega_w^2 = \langle v, w \rangle \; \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und $f^*(\omega)$ die in der Vorlesung definierte Zurückziehung von ω mit f. Außerdem seien $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass gilt

$$f^*(\omega) \wedge f^*(\psi) = f^*(\omega \wedge \psi).$$

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Es seien $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ und $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$, so dass

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &:= 3x^2 y dx + (x^3 - \sin(y))dy \\ \beta(x,y) &:= \frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $d\alpha$ bzw. $d\beta$. Sind α und β geschlossen oder exakt?

b) Zeigen Sie, dass $dF_\beta = \beta$ für $F_\beta(x,y) := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

c) Finden Sie $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $dF_\alpha = \alpha$.

Viel Erfolg!