Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

24.06.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Aufgabenblatt 10

Abgabe der Lösungen am 03.07.2008 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (2+2+2+1 Punkte)

Es seien $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ kompakt, $f(u) > 0$ für alle $u \in [a, b]$, $K := [a, b] \times [0, 2\pi)$ und $\varphi : K \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(u, \theta) := \begin{pmatrix} u \\ f(u)\cos(\theta) \\ f(u)\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

$\varphi(K)$ ist die sogenannte Rotationsfläche, die durch Rotation des Graphen von f um das Intervall $[a, b]$ entsteht.

a) Berechnen Sie die Gramsche Determinante von φ.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\varphi(K)$.

c) Nun sei für $r > 0$ die Funktion $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(u) := \sqrt{r^2 - u^2}$. Berechnen Sie für $0 < \epsilon < r$ den Flächeninhalt der Rotationsfläche $\varphi(K_\epsilon)$ mit $K_\epsilon := [-r + \epsilon, r - \epsilon] \times [0, 2\pi)$.

d) Berechnen Sie nun den Flächeninhalt für $\lim_{\epsilon \to 0}$. Welcher Körper wird durch $\lim_{\epsilon \to 0} \varphi(K_\epsilon)$ beschrieben?

Aufgabe 2: (3+3 Punkte)

Es sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ eine 1-Differentialform definiert durch $\omega := xy^2\, dx + 2xy\, dy$. Außerdem sei

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y \leq 1\} \quad \text{und} \quad \Gamma := \partial D$$

der Rand von D im Gegenuhrzeigersinn. Berechnen Sie $I := \int_\Gamma \omega$

a) mit der Definition des Integrals

b) und mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: (2+3+2+3 Punkte)

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $V(D)$ sein Flächeninhalt und ∂D sein im Gegenuhrzeigersinn orientierter Rand.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes, dass gilt

$$V(D) = \int_{\partial D} x \; dy = -\int_{\partial D} y \; dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \; dy - y \; dx.$$

b) Es sei $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Birnenkurve mit Parametern $a, b > 0$, gegeben durch

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \frac{a}{2}(1 + \cos(t)) \\ \frac{a^2}{8b}(\sin(2t) + 2\sin(t)) \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie das Bild von φ und berechnen Sie den von φ eingeschlossenen Flächeninhalt.

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes in Polarkoordinaten, dass gilt

$$V(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} r^2 \; d\theta.$$

d) Nun sei $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Kardioide mit dem Parameter $a > 0$ gegeben durch $r = a(1 + \cos(\theta))$. Zeichnen Sie das Bild von φ und berechnen Sie den von φ eingeschlossenen Flächeninhalt.

Viel Erfolg!