Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Dr. habil. Mario Bebendorf
Dr. Lukas Jager

10.04.2008

Mathematik II für Physiker

Sommersemester 2008

Aufgabenblatt 1

Abgabe der Lösungen am 17.04.2008 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume, jeweils durch Angabe einer Basis.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;\mathbb{R})$
- $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C})$

Dabei ist $\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ die Menge aller $n \times n$ Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$.

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Matrizen $A_i \in \mathrm{M}(2,\mathbb{R})$ für $i = 1,\dots,6$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Für $i = 1,\dots,6$:

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_i.

Bitte wenden!

b) Geben Sie eine Basis $\{b_1, b_2\}$ an, so dass die Matrixdarstellung von A_i bzgl. der Basis von der Form

$$
\begin{aligned}
& B_i &=& \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad && \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\
\text{oder} \quad & B_i &=& \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad && \lambda \in \mathbb{R} \\
\text{oder} \quad & B_i &=& \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad && a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } b \neq 0
\end{aligned}
$$

ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle (reellen) Eigenwerte der Matrix $A \in \mathrm{M}(4, \mathbb{R})$

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 & -6 \\ 0 & -10 & -11 & -10 \\ 0 & 10 & 11 & 10 \\ 1 & -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}.
$$

Hinweis: Mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes kann man die Determinante einer Matrix $B \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ mit Einträgen b_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ wie folgt berechnen:

$$
\det B = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} \det B_{ij}.
$$

Dabei ist $B_{ij} \in \mathrm{M}(n-1, \mathbb{R})$ die Matrix, die aus B durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Viel Erfolg!