Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn

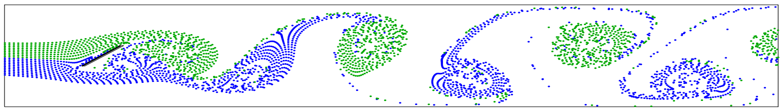
Abteilung Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation

Professor Dr. Michael Griebel

Praktikum Sommersemester 2001

Numerische Simulation und Visualisierung

- Leitung: *Prof. Dr. M. Griebel*, Zi. 604, Tel. 73 3437
- Mitarbeiter: *F. Koster*, Wegelerstr. 4, Tel. 73 3173



Blatt 6

Erweiterung des mathematischen Modells um die Energiegleichung

Wie wir auf den vorangegangenen Blättern gesehen haben, kann man mit den bisher benutzten Gleichungen (Massen- und Impulserhaltung) viele Arten von Strömungen behandeln. Häufig möchte man aber auch den Einfluß von Temperaturunterschieden auf die Strömung und den Wärmetransport mit der Strömung verfolgen können. In vielfältigen industriellen Anwendungen, wie Energieumwandlungsprozessen, Energiespeichern, Kraftwerken, Kühltürmen, dem Kristallwachstum aus flüssiger Phase und Anwendungen in Natur und Umwelt, wie Meteorologie, Ozeanographie und Klimatologie, ist das Wissen um den Wärmetransport, das Temperaturfeld und das assoziierte Strömungsfeld von großem Interesse.
Die numerische Simulation bietet hier wieder ein wichtiges Hilfsmittel, da Experimente auch auf diesen Gebieten meist teuer und aufwendig sind und oft nicht sehr genau ausgemessen werden können. Zunächst beschreiben wir die notwendigen Erweiterungen des mathematischen Modells. Die entstehenden Gleichungen werden anschließend diskretisiert, und der numerische Algorithmus wird geeignet erweitert.

1. Die Energiegleichung

Für die Einbeziehung der Temperatur T ins mathematische Modell müssen nun die thermodynamischen Eigenschaften des Fluids berücksichtigt werden. Das Prinzip der *Energieerhaltung* liefert dann die *Energiegleichung* für *konstante Wärmediffusion* α*, eine* Wärmequelle q''' *und vernachlässigbare viskose Dissipation*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \mathrm{grad} T = \alpha \, \Delta T + q''' \,. \tag{1}$$

Dies ist eine klassische *Konvektions-Diffusions-Gleichung*, die den *konvektiven* Transport von Wärme (bzw. Temperatur) mit der Strömung ($\rightarrow \vec{u} \cdot \mathrm{grad} T$, Massentransport) und die *diffusive* Ausbreitung in alle Richtungen ($\rightarrow \alpha \, \Delta T$) beschreibt.
Der zentrale Einfluß der Temperatur auf das Fluid besteht nun darin, daß eine Temperaturänderung eine Dichteänderung des Fluids bewirkt: Bei Erwärmung nimmt das Volumen zu und das Fluid steigt auf. Es entstehen also Auftriebskräfte, die von der Temperatur abhängen (*thermische Auftriebskräfte*). Die Einbeziehung weiterer Einflüsse der Temperatur auf Fluid und Strömung, z.B. Änderung der Viskosität, führt auf Gleichungen, die schwierig zu behandeln sind. Daher sind Vereinfachungen notwendig. Die gebräuchlichste Methode ist hier die *Boussinesq-Approximation*[1]:

- Die Dichte wird als konstant angenommen, außer in den Termen der Auftriebskräfte.
- Alle anderen Fluid-Eigenschaften werden als konstant angenommen.
- Die viskose Dissipation ist vernachlässigbar klein.

Hier bedeutet der erste Punkt, daß die Kontinuitätsgleichung ihre inkompressible Form behält und in den Impulsgleichungen (1) und (2) von Blatt 1 die Dichte nur im Volumenkraftterm variabel ist. Die anderen beiden Punkte vereinfachen die Gleichungen soweit, daß das Hauptaugenmerk auf die thermischen Auftriebskräfte gerichtet wird.
So ergeben sich die Impulsgleichungen (in dimensionsbehafteter Form) zu

$$\varrho_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \mathrm{grad}) \vec{u} \right) + \mathrm{grad} p = \mu \Delta \vec{u} + \varrho(T) \vec{g} \, , \tag{2}$$

mit der dynamischen Viskosität μ.
Als eine weitere Vereinfachung stellt man bei der Boussinesq-Approximation einen linearen Zusammenhang zwischen ϱ und T her,

$$\varrho(T) = \varrho_\infty (1 - \beta \, (T(\vec{x}, t) - T_\infty)) \, , \quad \text{mit } \beta := -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial T} \, , \tag{3}$$

wobei ϱ_∞ und T_∞ Referenzgrößen sind und β der sogenannte *Volumenexpansionskoeffizient* ist. Die Impulsgleichung schreibt sich somit als

$$\varrho_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \mathrm{grad}) \vec{u} \right) + \mathrm{grad} p = \mu \Delta \vec{u} + \varrho_\infty (1 - \beta \, (T(\vec{x}, t) - T_\infty)) \vec{g} \, . \tag{4}$$

Durch die Boussinesq-Approximation besteht nun eine Koppelung zwischen der Energiegleichung (1) und der Impulsgleichung (4), so daß in diesem Modell eine Strömung allein durch einen Temperaturgradienten angetrieben werden kann: Ist ein ruhendes Fluid isotherm ($T = T_\infty$), so sind die antreibenden Kräfte Null, wird es jedoch über eine Wand geheizt, entstehen thermische Auftriebskräfte der Größenordnung $|\vec{g}| \beta (T_{\mathrm{heiz}} - T_\infty)$. [2]

[1] nach J. Boussinesq, obgleich diese Approximation schon früher von A. Oberbeck verwendet wurde.

[2] Im Zusammenhang mit dieser Modellierung spricht man auch von einem *Boussinesq-inkompressiblen* Fluid. Bei einer nur von der Temperatur getriebenen Strömung spricht man von *natürlicher Konvektion*.

Randbedingungen
Für die Temperatur unterscheidet man im wesentlichen zwei Randbedingungen. Dazu unterteilen wir den Rand in zwei disjunkte Teilstücke: $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

- *Dirichlet-Randbedingungen*
$$T|_{\Gamma_1} = T_1$$
Die Temperatur der Wand wird vorgeschrieben. Durch diese Randbedingung wird etwa das Heizen oder das Kühlen des Fluids über eine Wand beschrieben (z.B. das Heizen der Raumluft über einen Heizkörper).

- *Neumann-Randbedingungen*
$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = q_w$$
Hierbei bezeichnet κ den *Wärmeleitkoeffizienten* des Fluids und q_w den *Wärmefluß* durch die Wand. Diese Randbedingung beschreibt, wieviel Wärme vom Fluid über die Wand abgeleitet wird. Dies hängt zum einen von der Materialbeschaffenheit der Wand ab und zum anderen von den Temperaturen auf den verschiedenen Seiten der Wand. Im Fall $q_w = 0$ nennt man diese Randbedingung *adiabatisch*, und sie besagt, daß kein Wärmeaustausch über diese Wand geschieht (isolierte Wand).

Betrachtet man also eine beheizte oder gekühlte Wand oder einen Einströmrand, so ist die Temperatur explizit vorzugeben, betrachtet man eine sonstige feste Wand, ist der Wärmefluß durch sie vorzugeben. Bei einem Ausströmrand werden die adiabatischen Randbedingungen gesetzt.

Neue Größen
Durch die Hinzunahme der Energiegleichung zu den Navier-Stokes-Gleichungen treten nun eine Reihe neuer dimensionsloser Größen auf, die wichtige Eigenschaften des Fluids und der Strömung beschreiben. Hier sei zuerst die

$$\textit{Prandtlzahl} \qquad Pr := \frac{\nu}{\alpha} \tag{5}$$

genannt, die das Verhältnis zwischen der Impuls- und der Wärmeausbreitung beschreibt. Dabei ist $\nu = \mu/\varrho_\infty$ die kinematische Viskosität . Sie ist im Gegensatz zur Reynoldszahl Re eine Größe, die ausschließlich eine Eigenschaft des Fluids beschreibt (nicht der Strömung). Typische Werte liegen zwischen 3 und 300 für Flüssigkeiten und zwischen 0.7 und 1.0 für Gase.
Weiterhin wird in diesem Zusammenhang oft auch die

$$\textit{Grashofzahl} \quad Gr := \frac{|\vec{g}|\beta(T_2 - T_1)L^3}{\nu^2} \quad \text{und die } \textit{Rayleighzahl} \quad Ra := Pr\, Gr \tag{6}$$

verwendet, wobei L eine charakteristische Länge in der Strömung bezeichnet. Die Grashofzahl Gr drückt das Verhältnis der thermischen Auftriebskräfte zu den viskosen Kräften aus. Die

Rayleighzahl Ra ist auch *modifizierte Grashofzahl* bekannt. Schließlich sei noch als wichtige dimensionslose Größe die

$$\textit{Nußeltzahl} \qquad Nu := \frac{Q_{\text{Konvektion}}}{Q_{\text{Wärmediffusion}}} \tag{7}$$

genannt. Sie drückt das Verhältnis zwischen dem konvektiven Wärmeübergang $Q_{\text{Konvektion}}$ und dem diffusiven Wärmeübergang $Q_{\text{Wärmediffusion}}$ in Wandnähe (Grenzschicht) aus. Bei beheizten Seitenwänden mit den Dirichlet-Temperaturen T_l bzw. T_r an der linken bzw. rechten Wand lassen sich die einzelnen Wärmeübergänge wie folgt ausdrücken:

$$Q_{\text{Konvektion}} = \kappa \int_0^{L_y} \left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} dy\,, \qquad Q_{\text{Wärmediffusion}} = \kappa\, L_y(T_l - T_r)/L_x\,,$$

wobei L_y die Höhe und L_x die Länge des betrachteten Behältnisses ist. Somit gilt für die Nußeltzahl

$$Nu = \frac{\int_0^{L_y} \left(-\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} dy}{L_y(T_l - T_r)/L_x}\,. \tag{8}$$

Für andere Konfigurationen gelten analoge Formeln.

Dimensionslose Formulierung
Die beiden Gleichungen (4) und (1) werden nun auf dimensionslose Größen bezogen. Dazu führen wir zusätzlich zu den bereits bekannten dimensionslosen Variablen Geschwindigkeit, Druck, Dichte und Zeit die dimensionslose Temperatur, den dimensionslosen Volumenexpansionskoeffizienten und eine dimensionslose Wärmequelle

$$T^* := \frac{T - T_\infty}{T_\Delta}\,, \qquad \beta^* := T_\Delta \beta\,, \qquad q'''^* := \frac{L}{T_\Delta u_\infty} q''' \tag{9}$$

ein, wobei T_Δ ein Skalierungsfaktor ist.[3] Damit wird aus der Impulsgleichung (4)

$$\frac{\partial}{\partial t^*}\vec{u}^* + (\vec{u}^* \cdot \text{grad}^*)\vec{u}^* + \text{grad}^* p^* = \frac{1}{Re}\Delta^* \vec{u}^* + (1 - \beta^* T^*)\vec{g}^* \tag{10}$$

und aus der Energiegleichung

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \vec{u}^* \cdot \text{grad}^* T^* = \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\,\Delta^* T^* + q'''^*\,. \tag{11}$$

[3]Bei Strömungen mit beheizten bzw. gekühlten Wänden wird T_Δ meist als die Temperaturdifferenz $T_\Delta := T_H - T_C$ gewählt. Als Referenztemperatur T_∞ nimmt man dann entweder $T_\infty := T_C$ ($\Rightarrow T^* \in [0,1]$) oder $T_\infty := (T_H + T_C)/2$ ($\Rightarrow T^* \in [-0.5, +0.5]$).

Die Neumann-Randbedingung wird zu

$$\frac{\partial T^*}{\partial n^*} = -\frac{L\, q_w}{\kappa\, T_\Delta}.$$

Wählt man die Länge L_x eines betrachteten Behältnisses als die charakteristische Länge L, läßt sich die Nußeltzahl Nu aus (8) einfach schreiben als

$$Nu = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \left(-\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right)_{x^*=0} dy^* \, .$$

Im folgenden werden der Einfachheit halber die Sterne wieder weggelassen.

Beispiele
Das einfachste Beispiel einer rein temperaturgetriebenen Strömung bildet sich aus, wenn das Fluid über eine Seitenwand erwärmt und über die gegenüberliegende Seitenwand gekühlt wird. Durch die Erwärmung an der einen Wand dehnt sich das Fluid aus und steigt auf. Das Kühlen an der anderen Wand bewirkt dagegen ein Zusammenziehen des Fluids, und das Fluid sinkt daher ab. Insgesamt bildet sich eine einzige Zelle rotierenden Fluids aus.
Abbildung 1 zeigt eine Strömung, die durch Heizen der unteren und Kühlen der oberen Wand hervorgerufen wird. Man erkennt, daß sich eine qualitativ völlig andere Strömung ausbildet, als bei beheizten Seitenwänden. Hier bilden sich zellenartige Zyklen rotierenden Fluids aus, die sogenannten *Rayleigh-Bénard-Zellen.*

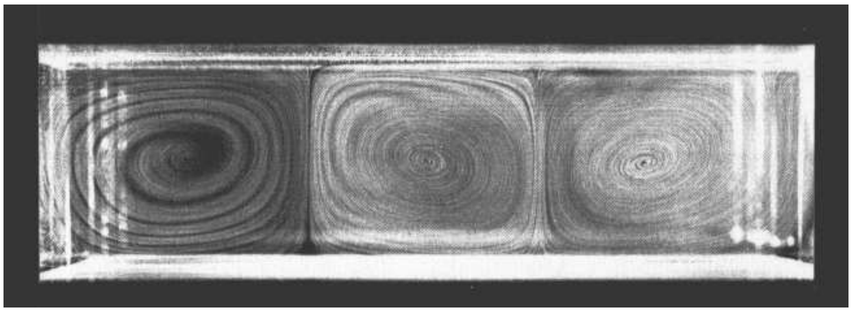


Bild 1 Strömung bei beheizter unterer Wand, gekühlter oberer Wand und isolierten Seitenwänden

2. Diskretisierung der Energiegleichung und Erweiterung des Algorithmus
Für die Erweiterung des numerischen Verfahrens muß die Energiegleichung (11) auf dem versetzten Gitter (*staggered grid*) diskretisiert, sowie die Randbedingungen diskret formuliert werden. Außerdem müssen die Stabilitätsbedingungen angepaßt und der Algorithmus entsprechend erweitert werden.

Diskretisierung der Energiegleichung

Analog zu den Impulsgleichungen, die mittels der Kontinuitätsgleichung auf die auf Blatt 1 angegebene Form umgeformt wurden, diskretisieren wir die dimensionslose Energiegleichung (11) in der Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) = \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + q''' \,. \tag{12}$$

Der Ort der Diskretisierung von T und der Energiegleichung (12) im versetzten Gitter wird wie beim Druck p im Zellmittelpunkt gewählt, so daß die diskreten Terme der Gleichung

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_{i,j}^{(n+1)} + \left[\frac{\partial (uT)}{\partial x}\right]_{i,j} + \left[\frac{\partial (vT)}{\partial y}\right]_{i,j} = \frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\left(\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_{i,j} + \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]_{i,j}\right) + q'''_{i,j} \tag{13}$$

sich zu

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]_{i,j}^{(n+1)} &= \frac{1}{\delta t}\left(T_{i,j}^{(n+1)} - T_{i,j}^{(n)}\right) \,, \\
\left[\frac{\partial (uT)}{\partial x}\right]_{i,j} &= \frac{1}{\delta x}\left(u_{i,j}\frac{T_{i,j}+T_{i+1,j}}{2} - u_{i-1,j}\frac{T_{i-1,j}+T_{i,j}}{2}\right) \\
&\quad + \frac{\gamma}{\delta x}\left(|u_{i,j}|\frac{T_{i,j}-T_{i+1,j}}{2} - |u_{i-1,j}|\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{2}\right) \,, \\
\left[\frac{\partial (vT)}{\partial y}\right]_{i,j} &= \frac{1}{\delta y}\left(v_{i,j}\frac{T_{i,j}+T_{i,j+1}}{2} - v_{i,j-1}\frac{T_{i,j-1}+T_{i,j}}{2}\right) \\
&\quad + \frac{\gamma}{\delta y}\left(|v_{i,j}|\frac{T_{i,j}-T_{i,j+1}}{2} - |v_{i,j-1}|\frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{2}\right) \,, \\
\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_{i,j} &= \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\delta x)^2} \,, \\
\left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]_{i,j} &= \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\delta y)^2}
\end{aligned} \tag{14}$$

ergeben. Bis auf die Temperatur in der Zeitableitung werden alle Werte zum Zeitpunkt t_n ausgewertet, so daß $T^{(n+1)}$ aus $T^{(n)}$, $u^{(n)}$ und $v^{(n)}$ explizit berechnet werden kann. Wie bei der Diskretisierung der Impulsgleichungen auf Blatt 1 wurde bei der Diskretisierung der Konvektionsterme (Terme zwei und drei in (14)) das *Donor-Cell-Schema* verwendet. Der Parameter $\gamma \in [0,1]$ stellt wie in den Gleichungen (4),(5) auf Blatt 1 eine Mittelung zwischen der Diskretisierung mit zentralen Differenzen und der Donor-Cell-Diskretisierung her. Da die Energiegleichung im Zellmittelpunkt diskretisiert wird, erübrigt sich die bei der Diskretisierung der Impulsgleichungen benötigte Mittelung der Geschwindigkeiten in x- bzw. y-Richtung.

Randbedingungen

Die diskrete Formulierung der Randbedingungen wird hier nur für ein rechteckiges Gebiet $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ angegeben. Die Erweiterung auf allgemeine Geometrien über das Flagfeld gemäß Blatt 2 ist jedoch analog zu den schon behandelten Randbedingungen. An Kantenzellen (die nur zu einer Fluidzelle benachbart sind) werden die folgenden Formeln entsprechend übernommen und an Eckzellen (die zu zwei Fluidzellen benachbart sind) erhält man zwei Bedingungen, die in dieser Zelle gemittelt werden.

1.) *Dirichlet-Randbedingung:*
Die kontinuierliche Randbedingung etwa eines linken Randes $T|_{\Gamma_l} = T^{0,y}(y)$ wird im diskreten Fall durch Mittelung erfüllt:

$$\frac{T_{0,j} + T_{1,j}}{2} = T^{0,y}((j - 0.5)\delta y).$$

Somit ergeben sich die diskreten Randbedingungen an den Rändern zu

$$\begin{aligned} T_{0,j} &:= 2\,T^{0,y}((j-0.5)\delta y) - T_{1,j}\,, && \text{für } j = 1, ..., j_{\max}\,, \\ T_{i_{\max}+1,j} &:= 2\,T^{a,y}((j-0.5)\delta y) - T_{i_{\max},j}\,, && \text{für } j = 1, ..., j_{\max}\,, \\ T_{i,0} &:= 2\,T^{x,0}((i-0.5)\delta x) - T_{i,1}\,, && \text{für } i = 1, ..., i_{\max}\,, \\ T_{i,j_{\max}+1} &:= 2\,T^{x,b}((i-0.5)\delta x) - T_{i,j_{\max}}\,, && \text{für } i = 1, ..., i_{\max}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

2.) *Neumann-Randbedingung:*
Auch hier, vom Beispiel des linken Randes ausgehend,

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\Gamma_l} = T_n^{0,y}(y) \quad \longrightarrow \quad \frac{T_{0,j} - T_{1,j}}{\delta x} = T_n^{0,y}((j - 0.5)\delta y)\,,$$

kommen wir zu den Randbedingungen

$$\begin{aligned} T_{0,j} &:= T_{1,j} + \delta x \cdot T_n^{0,y}((j-0.5)\delta y)\,, && \text{für } j = 1, ..., j_{\max}\,, \\ T_{i_{\max}+1,j} &:= T_{i_{\max},j} + \delta x \cdot T_n^{a,y}((j-0.5)\delta y)\,, && \text{für } j = 1, ..., j_{\max}\,, \\ T_{i,0} &:= T_{i,1} + \delta y \cdot T_n^{x,0}((i-0.5)\delta x)\,, && \text{für } i = 1, ..., i_{\max}\,, \\ T_{i,j_{\max}+1} &:= T_{i,j_{\max}} + \delta y \cdot T_n^{x,b}((i-0.5)\delta x)\,, && \text{für } i = 1, ..., i_{\max}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Hier ist zu beachten, daß $\partial/\partial n$ die Ableitung nach der *äußeren* Normalen ist.

Stabilitätsbedingungen

Zu den Stabilitätsbedingungen für die Zeitschrittweite von Blatt 1 kommt eine weitere hinzu:

$$\frac{2\delta t}{Re\,Pr} < \left(\frac{1}{(\delta x)^2} + \frac{1}{(\delta y)^2}\right)^{-1}. \tag{17}$$

Entsprechend wird die Formel (19) von Blatt 1 zur Zeitschrittweitensteuerung auf

$$\delta t = \tau \ \min\left(\frac{Re\,Pr}{2}\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{dy^2}\right)^{-1}, \frac{Re}{2}\left(\frac{1}{\delta x^2}+\frac{1}{dy^2}\right)^{-1}, \frac{\delta x}{|u_{\max}|}, \frac{\delta y}{|v_{\max}|} \right), \tag{18}$$

erweitert, wobei $\tau \in]0,1]$ wie bisher einen Sicherheitsfaktor darstellt.

Anpassung der Impulsgleichungen und Erweiterung des Algorithmus

Der auf Blatt 1 beschriebene Algorithmus muß ebenfalls geeignet ergänzt werden. Dazu müssen die Größen F und G aus Gleichung (9) und (10) von Blatt 1 um den Boussinesq-Term erweitert werden:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i,j}^{(n)} &:= F_{i,j}^{(n)} - \beta\frac{\delta t}{2}(T_{i,j}^{(n+1)} + T_{i+1,j}^{(n+1)})g_x\,, \\ \tilde{G}_{i,j}^{(n)} &:= G_{i,j}^{(n)} - \beta\frac{\delta t}{2}(T_{i,j}^{(n+1)} + T_{i,j+1}^{(n+1)})g_y\,, \end{aligned} \tag{19}$$

wobei die Randbehandlung hier unverändert bleibt. Die vollständig diskretisierten Impulsgleichungen lauten dann:

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \tilde{F}_{i,j}^{(n)} - \frac{\delta t}{\delta x}(p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)})\,, \tag{20}$$
$$i = 1,\ldots,i_{\max}-1, \quad j = 1,\ldots,j_{\max}\,,$$
$$v_{i,j}^{(n+1)} = \tilde{G}_{i,j}^{(n)} - \frac{\delta t}{\delta y}(p_{i,j+1}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)})\,, \tag{21}$$
$$i = 1,\ldots,i_{\max}, \quad j = 1,\ldots,j_{\max}-1\,.$$

Der Algorithmus läßt sich wie folgt zusammenfassen:

Setze $t := 0$, $n := 0$
Belege u, v, p, T mit Anfangswerten
Solange $t < t_{\text{end}}$
    Wähle gegebenenfalls δt gemäß (18)
    Setze die Randwerte für u, v und T
    Berechne $T^{(n+1)}$ gemäß (13)
    Berechne $\tilde{F}^{(n)}$ und $\tilde{G}^{(n)}$ gemäß (19)
    Berechne die rechte Seite der Druckgleichung
    Setze $it := 0$
    Solange $it < it_{\max}$ und $\|r^{it}\| > eps$ (bzw. $\|r^{it}\| > eps\|p^0\|$)
        Führe einen SOR-Zyklus durch
        Berechne die Norm des Residuums der Druckgleichung $\|r^{it}\|$
        $it := it + 1$
    Berechne $u^{(n+1)}$ und $v^{(n+1)}$ gemäß (20),(21) mit $\tilde{F}^{(n)}$ und $\tilde{G}^{(n)}$
    $t := t + \delta t$
    $n := n + 1$

Implementierung
Um die Temperaturphänomene in das Programm mit aufzunehmen,[4] müssen folgende Größen und Prozeduren eingeführt bzw. erweitert werden.

- Problemabhängige Größen:

  `REAL Pr` Prandtlzahl Pr
  `REAL beta` Volumenexpansionskoeffizient β
  `REAL TI` Anfangsbelegung der Temperatur

- Datenfeld der Dimension `[0,imax+1]x[0,jmax+1]`:

  `REAL **TEMP` Temperatur T

1.)
```
void COMP_TEMP(U,V,REAL **TEMP,FLAG,imax,jmax,delt,
                          delx,dely,GX,GY,gamma,Re,Pr,beta)
```
Hier wird die Temperatur $T^{(n+1)}$ gemäß der Gleichungen (13) und (14) im Feld `TEMP` berechnet. Der Aufruf erfolgt im Hauptprogramm nach dem Setzen der Randwerte. Diese Prozedur kann in dem Modul `uvp.c` aufgenommen werden.

2.) Die Prozedur `READ_PARAMETER` muß um das Einlesen der Werte für `TI` (Initialwert der Temperatur), `Pr` (Prandtlzahl) und `beta` (Volumenexpansionskoeffizient) erweitert werden.

3.) Die Prozedur `COMP_FG` ist gemäß Formel (19) zu erweitern. Neben dem Feld `TEMP` ist auch die Größe `beta` ein neuer Übergabeparameter.

4.) In der Prozedur `INIT_UVP` wird auch noch die Temperatur initialisiert.

5.) Die Randbedingungen für die Temperatur T werden in den Prozeduren `SETBCOND` und `SETSPECBCOND` gesetzt. Hier bietet es sich an, in `SETBCOND` die Wände grundsätzlich als adiabatisch zu setzen und in `SETSPECBCOND` das Heizen und Kühlen zu behandeln, wo auch das jeweilige Flagfeld berücksichtigt wird. Die relevanten Formeln sind (15) und (16).

6.) Die Temperaturwerte können mit der allgemeinen Funktion `OUTPUT` ausggeben werden.

Dies ist die Erweiterung des Codes aus Blatt 1 bzw. Blatt 2, in dem keine freien Ränder modelliert sind. [5]

3. Visualisierung des Wärmetransports

Neben dem (durch die Temperatur getriebenen) Geschwindigkeitsfeld, das zumeist mittels der Stromlinien visualisiert wird, ist es nun von Interesse, die Temperaturverteilung und den

[4] Der Einfachheit halber wird bei der Implementierung keine innere Wärmequelle q''' berücksichtigt.

[5] Im Fall sehr kleiner Schwerkraft (sogenannter *Mikrogravitation*) oder bei sehr dünnen Flüssigkeitsschichten tritt ein neues Phänomen auf. Hier dominieren jetzt die Oberflächenspannungen. Ist zusätzlich noch die Temperatur T nicht konstant, entstehen sogenannte *thermokapillare Kräfte* an den freien Oberflächen, die wiederum Oberflächenspannungen entsprechen. In diesem Fall spricht man von einer *Marangoni-Konvektion*. Wichtig sind diese Phänomene bei Experimenten unter Schwerelosigkeit und bei sehr dünnen Flüssigkeitsschichten (*dünnen Filmen*).

Transport der Wärmemenge graphisch darzustellen. Für das Temperaturfeld verwendet man die Höhenlinien und um den Transport der Wärmemenge zu zeigen, konstruiert man analog zur Stromfunktion ψ, die im wesentlichen aus der Kontinuitätsgleichung gewonnen wurde, eine neue Funktion H, die sogenannte *Wärmefunktion* (engl. *heatfunction*). Dafür bringt man die zweidimensionale, wärmequellenfreie, stationäre ($\partial T/\partial t = 0$) Energiegleichung (12) auf eine zur Kontinuitätsgleichung analoge „Divergenz-Form“:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\kappa}{\varrho_\infty c_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\kappa}{\varrho_\infty c_p}\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$\iff \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho_\infty c_p u T - \kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho_\infty c_p v T - \kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0\,.$$

Hier nun definiert man analog zur Definition von ψ die Wärmefunktion über

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= \varrho_\infty c_p u T - \kappa\frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{(Netto-Energietransport in } x\text{-Richtung)}, \\ -\frac{\partial H}{\partial x} &= \varrho_\infty c_p v T - \kappa\frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{(Netto-Energietransport in } y\text{-Richtung)}. \end{aligned} \tag{22}$$

Anhand dieser Definition (und anhand der Herleitung) erkennt man die Analogie zur Stromfunktion ψ. So, wie die Stromfunktion den Transport der Masse in der Strömung beschreibt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= u \qquad \text{(Netto-Massentransport in } x\text{-Richtung)}, \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= v \qquad \text{(Netto-Massentransport in } y\text{-Richtung)}, \end{aligned}$$

so beschreibt die Wärmefunktion den Transport der Wärme in der Strömung. Auch für die Wärmefunktion gilt, daß die Höhenlinien von H, die sogenannten *Wärmelinien* (engl. *heatlines*), lokal parallel zum Wärmefluß verlaufen. Eine dimensionslose Formulierung der Wärmefunktion leitet man analog aus der dimensionslosen Energiegleichung (11) ab. Hierfür ergeben sich die Definitionsgleichungen

$$\frac{\partial H^*}{\partial y^*} = Re\ Pr\ u^* T^* - \frac{\partial T^*}{\partial x^*}\,, \qquad -\frac{\partial H^*}{\partial x^*} = Re\ Pr\ v^* T^* - \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\,, \tag{23}$$

und es gilt

$$H^* = \frac{H}{\kappa\, T_\Delta}\,. \tag{24}$$

Implementierung

Die Erweiterung des Programms geschieht durch folgende Größen und Prozeduren.

- Datenfeld:

  `REAL **HEAT` Wärmefunktion H

1.) `void COMP_HEAT(U,V,TEMP,REAL **HEAT,FLAG,Re,Pr,`
`imax,jmax,delx,dely)`

Hier wird die in der rechten oberen Ecke der Zelle (i,j) definierte diskrete Größe $H_{i,j}$ gemäß der Diskretisierung

$$H_{i,j} = H_{i,j-1} + \delta y \left(Re\,Pr\,u_{i,j}\,\frac{T_{i+1,j}+T_{i,j}}{2} - \frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\delta x} \right), \qquad i = 0,\ldots,i_{\max},\; j = 1,\ldots,j_{\max},$$

der ersten Definitionsgleichung aus (23) berechnet. Analog zur Stromfunktion ψ wird nun $H_{i,0} = 0$ für alle i gesetzt.
Hinweis: Diese Formel macht nur Sinn, wenn die Integration von einer adiabatischen Wand zu einer anderen adiabatischen Wand geschehen kann. Gegebenenfalls diskretisiert man die zweite Definitionsgleichung aus (23). Analog zur Stromfunktion $\psi_{i,j}$ muß darauf geachtet werden, daß in Hinderniszellen nichts auf $H_{i,j}$ addiert wird: $H_{i,j} = H_{i,j-1}$.

2.) Auch die Werte von `HEAT` können mit `OUTPUT` ausgegeben werden.

Die neue Prozedur `COMP_HEAT` kann im Modul `visual.c` aufgenommen werden.

4. Anwendungsbeispiele

Natürliche Konvektion bei beheizten Seitenwänden

Als Beispiel für temperaturgetriebene Strömungen soll die Ausbildung einer natürlichen Konvektionsströmung bei beheizten Seitenwänden und adiabatischen Wänden oben und unten (vgl. Abb. 2) dienen. Um den Einfluß der Rayleighzahl *Ra* auf die Strömung zu zeigen, sollen zwei Strömungen mit unterschiedlicher Rayleighzahl betrachtet werden. Gleichzeitig soll jeweils der Wärmetransport mittels der in Abschnitt 3 eingeführten *Wärmelinien* gezeigt werden.

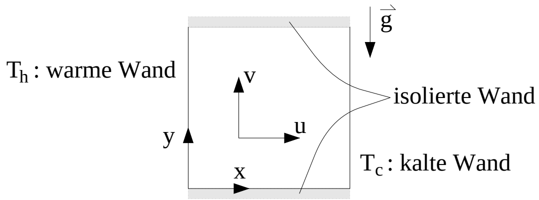


Bild 2 Grundkonfiguration bei beheizten Seitenwänden und isolierten Wänden oben und unten

1.) *Strömung mit Prandtlzahl* $Pr = 7$ *und Rayleighzahl* $Ra = 1.4 \cdot 10^2$
Mit den Programmparametern

`Pr = 7`	`Re = 985.7`	`beta = 2.1e-4`
`GX = 0.0`	`GY = -9.706e-2`	
`xlength = 1`	`ylength = 1`	
`T_H = 1`	`T_C = 0`	(also $T_\infty = T_C$)

und einem Gitter mit

```
imax = 50, jmax = 50
```

und mit Haftbedingungen an allen vier Wänden.

2.) *Strömung mit Prandtlzahl* $Pr = 7$ *und Rayleighzahl* $Ra = 2.0 \cdot 10^5$
Hier sind die Programmparameter

`Pr = 7`	`Re = 11063`	`beta = 2.1e-4`
`GX = 0.0`	`GY = -1.1005`	
`xlength = 1`	`ylength = 1`	
`T_H = 1`	`T_C = 0`	(also $T_\infty = T_C$)

und das Gitter ist wieder durch

```
imax = 50, jmax = 50
```

gegeben.