Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 11

Ausgabe: Freitag, den 6. Juli 2001
Abgabe: Freitag, den 13. Juli 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 48:
Forme die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - y' - 2y = 0$$

in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um. Löse es mittels Picard-Lindelöf-Iteration bzgl. der Anfangswerte $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$. (5 Punkte)

Aufgabe 49:
Bestimme die Lösungen der Anfangswertprobleme
a)

$$y'''' - 9y''' + 23y'' - 3y' - 36y = 0$$

$$y(0) = -2, \qquad y'(0) = 3, \qquad y''(0) = 3, \qquad y'''(0) = 19$$

b)

$$y'' + 4y = 0$$

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = -2$$

(10 Punkte)

Aufgabe 50:
Untersuche das Anfangswertproblem

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \qquad y(0) = 0$$

auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. (8 Punkte)

Aufgabe 51:
a) Seien $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Untersuche die Differentialgleichung

$$y' = ay^\alpha + by$$

auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu einem beliebigen Anfangswert $y(x_0) = y_0$. Im Fall $\alpha \notin 2\mathbb{Z}$ sind nur positive Lösungen zugelassen. Führe die Lösung zurück auf die Lösung einer Differentialgleichung bekannten Typs.
Hinweis: Multipliziere die Differentialgleichung mit $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$.
b) Seien $c, d, e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, sei φ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = cy^2 + dy + e.$$

Wie lassen sich mit Hilfe von φ und Aufgabe a) alle Lösungen bestimmen? (15 Punkte)

Aufgabe 52:
a) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

Zeige, daß es eine Umgebung U von x_0, eine Umgebung V von y_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : U \to V$ gibt, so daß $M \cap (U \times V) = \text{graph}\ \varphi$ ist und φ einer Differentialgleichung der Form

$$\varphi'(x) = G(x, \varphi(x))$$

genügt. Wie sieht G aus?
b) Sei

$$F(x, y) = 3x^2 y + y^3 + x^3 + 1.$$

Bestimme die Extrema der Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung gemäß Aufgabe a).
(10 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.