Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 10

Ausgabe: Freitag, den 29. Juni 2001
Abgabe: Freitag, den 6. Juli 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 43:
Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = ax^2 + y^2.$$

Für welche Punkte $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine Umgebung U von (x_0, y_0), so daß die Menge

$$M := \{(x,y) \in U : f(x,y) = f(x_0,y_0)\}$$

implizit durch eine Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ mit $V \subset \mathbb{R}$ beschrieben wird, d.h. $M = \{(x, g(x)) : x \in V\}$ oder $M = \{(g(y), y) : y \in V\}$? Gib — soweit existent — eine solche Darstellung explizit an. Deute die Ergebnisse geometrisch. (10 Punkte)

Aufgabe 44:
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0 \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Setze

$$M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(a)\}.$$

Zu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ den Punkt ohne die i-te Koordinate. Gemäß dem Satz über implizite Funktionen läßt sich jede Koordinate x_i von $x \in M$ in einer Umgebung U von a als Funktion der restlichen Koordinaten $\hat{x}_i$ darstellen: $x \in M \cap U \Leftrightarrow x_i = \varphi_i(\hat{x}_i)$. Zeige:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}(\hat{x}_2) \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}(\hat{x}_{n-1}) \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(\hat{x}_n) = (-1)^n$$

(10 Punkte)

Aufgabe 45:
Ein ehemaliger Mathematikstudent vermietet Zelte für Flugveranstaltungen von Fledermäusen. Die Zelte konstruiert er quaderförmig aus Stangen entlang der Kanten und Planen für die sechs Seiten (einschließlich Boden). Für den Bau eines Zeltes stehen ihm Stangen der Gesamtlänge $L > 0$ und Planen der Fläche $S > 0$ zur Verfügung. Da der Student in der Analysis-Vorlesung leider nicht genug mitgearbeitet hat und mittlerweile das Studium abgebrochen hat, weiß er nicht, welche Abmessungen am günstigsten sind. Hilf ihm und berechne mit der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren, wie groß die Kantenlängen $a > 0$, $b > 0$ und $c > 0$ gewählt werden müssen, so daß das Fledermausflugvolumen $V = abc$ maximal wird und alles Material verwendet wird, d.h. $S = 2ab + 2ac + 2bc$ und $L = 4a + 4b + 4c$. Für welche Parameter S und L ist dies überhaupt möglich? (15 Punkte)

Aufgabe 46:
Eine Firma kauft jeden Tag 1000 RSE[1] Rohschokolade ein, um daraus ihre unter Mathematikern sehr beliebten Pralinen herzustellen, wozu ihr drei Maschinen zur Verfügung stehen. Die erste stellt aus jeder RSE Pralinen im Wert von 3200 PWE[2] her, verursacht jedoch pro Tag 500000 PWE Fixkosten. Die zweite Maschine hat Fixkosten von 200000 PWE und stellt aus x RSE Pralinen im Wert von $5600x - 4x^2$ PWE her, wobei der quadratische Term auf mit zunehmender Auslastung steigende Schokoladenverdunstung zurückzuführen ist. Die dritte Maschine stellt aus x RSE Pralinen im Wert von $8800x - 12x^2$ PWE her. Sie verursacht keine Fixkosten, jedoch zweigen die sie betreibenden scheinselbstständigen Subunternehmer illegalerweise die Hälfte der Rohschokolade für eigene Zwecke ab. Wie müssen die 1000 RSE pro Tag auf die drei Maschinen aufgeteilt werden, damit der Erlös maximal wird?
Formuliere das Problem als Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen und löse es mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren. (10 Punkte)

Aufgabe 47:
Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ differenzierbar. Betrachte das restringierte Minimierungsproblem

$$f(x) \to \min \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \quad g(x) \leq 0,$$

wobei die Ungleichung komponentenweise zu verstehen ist.
Sei nun $(\overline{x}, \overline{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r_{\leq 0}$ ein Sattelpunkt der Langrangefunktion

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r_{\leq 0} \to \mathbb{R}, \qquad L(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot g(x)$$

im Sinne von

$$\forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r_{\leq 0} : \qquad L(\overline{x}, \lambda) \leq L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leq L(x, \overline{\lambda}).$$

Zeige, daß $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ eine Lösung des restringierten Minimierungsproblems ist und daß gilt:

$$\nabla f(\overline{x}) - \overline{\lambda} \cdot \nabla g(\overline{x}) = 0.$$

(10 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.

[1] RSE = Rohschokoladeneinheit
[2] PWE = Pralinenwährungseinheit