Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 9

Ausgabe: Freitag, den 22. Juni 2001
Abgabe: Freitag, den 29. Juni 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 38:
a) Prüfe, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$f(x) = \sqrt{x^2 + c} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \sqrt{x^4 + c}$$

stetig, lokal Lipschitz-stetig und (global) Lipschitz-stetig sind.
b) Sei $[a, b]$ ein reelles Intervall. Betrachte auf den $\mathbb{R}$-Vektorräumen

$$\begin{aligned} C^0 &:= \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\} \\ C^1 &:= \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig differenzierbar}\} \end{aligned}$$

die Normen

$$\|f\|_{C^0} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \qquad \text{und} \qquad \|f\|_{C^1} := \|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0}.$$

Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen bezüglich der genannten Normen Lipschitz-stetig sind. Berechne ggf. die bestmögliche, d.h. kleinste Lipschitz-Konstante.

$$\begin{aligned} D_0 &: (C^1, \|\cdot\|_{C^0}) \to (C^0, \|\cdot\|_{C^0}), \qquad D_0(f)(x) = f'(x) \\ D_1 &: (C^1, \|\cdot\|_{C^1}) \to (C^0, \|\cdot\|_{C^0}), \qquad D_1(f)(x) = f'(x) \\ I &: (C^0, \|\cdot\|_{C^0}) \to (C^1, \|\cdot\|_{C^1}), \qquad I(f)(x) = \textstyle\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 39:
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Ein kritischer Punkt $x_0 \in D$ von f, d.h. ein Punkt $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$, heißt *ausgeartet*, wenn $\det f''(x_0) = 0$ ist. Zeige, daß es zu jedem nicht ausgearteten kritischen Punkt eine Umgebung dieses Punktes gibt, in der keine weiteren kritischen Punkte liegen. (10 Punkte)

Aufgabe 40:
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Zeige

$$\begin{aligned} \|A\|_{1\to 1} &= \max_j \sum_i |a_{ij}| \qquad \text{(Spaltensummennorm)} \\ \|A\|_{\infty\to\infty} &= \max_i \sum_j |a_{ij}| \qquad \text{(Zeilensummennorm)} \end{aligned}$$

wobei 1 für die Summennorm und ∞ für die Maximumsnorm stehen. (10 Punkte)

Aufgabe 41:
Berechne die Operatornormen $\|M\|_{1\to1}$, $\|M\|_{2\to2}$ und $\|M\|_{\infty\to\infty}$ der Matrizen $M \in \{A, B, C\}$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei stehen 1 für die Summennorm, 2 für die Euklidische Norm und ∞ für die Maximumsnorm. Finde jeweils einen Vektor $x \neq 0$ mit $\|Mx\|_* = \|M\|_{*\to*}\|x\|_*$. (10 Punkte)

Aufgabe 42:
Seien X ein Banachraum und $T : X \to X$ eine lineare Abbildung mit $\|T\| < 1$. Zeige, daß $\mathrm{Id} - T : X \to X$ invertierbar ist und

$$\frac{1}{\|\mathrm{Id} - T\|} \;\leq\; \|(\mathrm{Id} - T)^{-1}\| \;\leq\; \frac{1}{1 - \|T\|}$$

Hinweis: Untersuche die Abbildung

$$S := \sum_{i=0}^{\infty} T^i = Id + T + (T \circ T) + (T \circ T \circ T) + \ldots$$

(10 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.