Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 8

Ausgabe: Freitag, den 15. Juni 2001
Abgabe: Freitag, den 22. Juni 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 34:
Seien $a, b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbare Funktionen, sei $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal differenzierbares Vektorfeld. Zeige:

$$\text{rot rot } V = \text{grad div } V - \Delta V$$

$$\text{div rot } V = 0$$

$$\text{rot grad } a = 0$$

$$\Delta(ab) = a\Delta b + 2(\text{grad } a) \cdot (\text{grad } b) + b\Delta a$$

(12 Punkte)

Aufgabe 35:
a) Zeige, daß $\mathbb{R}^{\geq 1} = [1, \infty)$ mit $d(x, y) = |x - y|$ ein vollständiger metrischer Raum ist.
b) Zeige, daß die Funktion

$$K : \mathbb{R}^{\geq 1} \to \mathbb{R}^{\geq 1}, \qquad x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^{\geq 1}$ mit $x \neq y$ der Bedingung

$$|K(x) - K(y)| < |x - y|$$

genügt und keinen Fixpunkt besitzt. (8 Punkte)

Aufgabe 36:
Sei B ein vollständiger metrischer Raum mit Metrik d. Zu jedem $s \in \mathbb{R}$ sei $K_s : B \to B$ eine Abbildung. Es gebe ein $c \in [0, 1)$, so daß für alle $x, y \in B$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$d(K_s(x), K_s(y)) \leq c\, d(x, y)$$

Weiterhin sei K_s in jedem Punkt $x \in B$ stetig von s abhängig, d.h. daß für jeden Punkt $x \in B$ die Abbildung $\mathbb{R} \to B$, $s \mapsto K_s(x)$ stetig ist. Gemäß dem Banachschen Fixpunktsatz existiert zu jedem $s \in \mathbb{R}$ genau ein Fixpunkt $x_s \in B$ von K_s. Zeige, daß der Fixpunkt stetig von dem Parameter s abhängt, d.h. daß die Abbildung $\mathbb{R} \to B$, $s \mapsto x_s$ stetig ist. (10 Punkte)

Aufgabe 37:
Beweise folgendes Maximumprinzip:
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig und in D zweimal differenzierbar. f genüge in D der Differentialungleichung

$$(\Delta + a \cdot \nabla)f \geq 0,$$

wobei $a \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor ist. Dann nimmt f ihr Maximum auf dem Rand ∂D an.
Hinweis: Verwende eine Vergleichsfunktion der Form

$$g(x) = e^{ca \cdot x}$$

mit einer geeigneten Konstanten $c \in \mathbb{R}$. (10 Punkte)

Differentialoperatoren:

Operator	Abkürzung	Symbol im Nablakalkül	Argument	Wert
Gradient	grad	∇	Skalar	Vektor
Divergenz	div	$\nabla\cdot$	Vektor	Skalar
Rotation	rot = curl	$\nabla\times$	Vektor (3D)	Vektor (3D)
Laplaceoperator	Δ	$\nabla\cdot\nabla$	Skalar	Skalar

Ein paar Identitäten der Vektorrechnung:

$a \times a = 0$	
$a \cdot (a \times b) = 0$	
$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$	Entwicklungssatz
$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$	Lagrangesche Identität

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.