Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 7

Ausgabe: Freitag, den 1. Juni 2001
Abgabe: Freitag, den 15. Juni 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 30:
Zeige, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = (x^2 - y)(2x^2 - y)$$

im Nullpunkt kein lokales Extremum besitzt, daß jedoch die Einschränkung auf eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt dort ein lokales Minimum besitzt. (8 Punkte)

Aufgabe 31:
Bestimme alle kritischen Stellen der Funktionen

$$f(x,y) = \sin(x+y) - \sin(x-y)$$

$$g(x,y) = (x^4 - 8x^2 + 17)e^{y^2+1}$$

Überprüfe, ob dort ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt. (10 Punkte)

Aufgabe 32:
a) Sei

$$x_{n+1} = A + B(x-a) + (x-a)^T C(x-a)$$

eine Quadrik, wobei $A \in \mathbb{R}$, $x, a, B \in \mathbb{R}^n$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist. Dabei sind x und a als Spalten- und B als Zeilenvektor zu verstehen. Zeige, daß es eine affine Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} y \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} + b$$

mit $M \in GL(n+1, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ gibt, die a in 0 überführt und die die Quadrik auf Normalform

$$y_{n+1} = y^T D y$$

transformiert, wobei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix mit Werten aus $\{1, -1, 0\}$ ist. Nutze dazu den Sylvesterschen Trägheitssatz aus der Linearen Algebra.
b) Bringe folgende Quadriken auf Normalform. Berechne jeweils eine zugehörige affine Koordinatentransformation. Bestimme den Typ der Quadriken.

$$Q_1: \qquad x_3 = 1 + (2\ \ 3)\begin{pmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 - 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 - 5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 - 5 \end{pmatrix}$$

$$Q_2: \qquad x_3 = 2 + (0\ \ 1)\begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

(15 Punkte)

Aufgabe 33:
a) Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare und bzgl. des Nullpunkts rotationssymmetrische Funktion. Es gibt also eine zweimal differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(\|x\|_2)$. Zeige, daß g genau dann der Differentialgleichung

$$g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r) = 0$$

genügt, falls f harmonisch ist, d.h. $\Delta f = 0$.
b) Zeige, daß die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \log \|x\|_2 & \text{falls } n = 2 \\ \|x\|_2^{2-n} & \text{falls } n \geq 3 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch ist.

(10 Punkte)

Programmieraufgabe 2:
a) Stelle die drei Funktionen aus den Aufgaben 30 und 31 einschließlich ihrer Niveaulinien graphisch dar. Bestimme den Gradienten und stelle ihn als Vektorfeld graphisch dar.
b) Finde die kritischen Stellen der Funktionen.
c) Berechne die Eigenwerte der Hessematrix an den kritischen Stellen. Entscheide (soweit möglich) anhand der Eigenwerte, ob ein lokales Minimum, Maximum oder kein Extremum vorliegt.

(10 Punkte)

Vorstellung der Lösungen:
Zeit: In der Woche vom 18.6. bis 22.6.2001, genauer Termin nach Vereinbarung.
Ort: CIP-Pool, Wegelerstr. 6, Zimmer 114.
Die Bearbeitung erfolgt (wie gehabt) mit Maple oder einem anderen Computeralgebrasystem. Die Programmieraufgabe kann in Gruppen von bis zu drei Studenten bearbeitet und vorgestellt werden.

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.