INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 6

Ausgabe: Freitag, den 25. Mai 2001
Abgabe: Freitag, den 1. Juni 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 25:
Zeige, daß

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } (x,y) = 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt einmal stetig partiell differenzierbar und zweimal partiell differenzierbar ist und daß gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

(5 Punkte)

Bemerkung: Ein Beispiel für eine differenzierbare, aber nicht stetig differenzierbare Funktion ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

vgl. Analysis I, Aufgabe 49 c).

Aufgabe 26:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f_x(x,y) + f_y(x,y) = 0.$$

Zeige, daß es eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = g(x-y)$$

gibt. (10 Punkte)

Aufgabe 27:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$yf_x(x,y) - xf_y(x,y) = 0.$$

a) Drücke f in Polarkoordinaten aus, d.h. betrachte

$$g = f \circ P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(r,\varphi) = f(P_2(r,\varphi)),$$

wobei P_2 die Funktion aus Aufgabe 24 ist. Berechne die Ableitungen g_φ und g_r in Abhängigkeit der Ableitungen f_x und f_y.
b) Zeige, daß es eine Funktion $h : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = h(x^2+y^2)$$

gibt. Wie ist dies geometrisch zu interpretieren? (10 Punkte)

Aufgabe 28:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Die partiellen Ableitungen seien *lokal beschränkt,* d.h.

$$\forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall y \in U \cap B_\varepsilon(x) : \quad |D_i f(y)| < C.$$

Zeige, daß f stetig ist. (10 Punkte)

Aufgabe 29:
a) Bestimme die Gradienten bzgl. des Euklidischen Skalarprodukts und bzgl. des Skalarprodukts

$$< x, y >= 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2$$

der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 x_3^2$$

b) Bestimme die Jacobimatrizen der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die letzte mit Hilfe der Kettenregel:

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \sin x_2 \\ x_2 \cos x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \qquad g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + y_3$$

c) Bestimme die Jacobimatrix von f und die Jacobimatrix der inversen Abbildung f^{-1}:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

(9 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.