Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 5

Ausgabe: Freitag, den 18. Mai 2001
Abgabe: Freitag, den 25. Mai 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 20:
Sei $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit Periode 2, es gelte

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{falls } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definiere

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad f(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(3^{2k-2}t), \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} g(3^{2k-1}t) \right)$$

a) Zeige, daß f existiert, d.h. daß die Reihen konvergieren.
b) Zeige, daß f stetig ist.
c) Zeige: im $f = [0,1]^2$, d.h. $f : [0,1] \to [0,1]^2$ ist surjektiv.
Hinweis zu c): Nutze eine Binärdarstellung $(0.x_1x_2x_3\ldots, 0.y_1y_2y_3\ldots)$ von $(x,y) \in [0,1]^2$, um einen Punkt $t \in [0,1]$ mit $f(t) = (x,y)$ zu konstruieren. (10 Punkte)

Aufgabe 21:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Definiere

$$g : I^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{falls } x \neq y \\ f'(x) & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Zeige, daß g genau dann stetig ist, wenn f' stetig ist. (10 Punkte)

Aufgabe 22:
Untersuche, in welchen Punkten die folgenden Funktionen stetig sind und in welchen differenzierbar. Berechne die Richtungsableitungen im Nullpunkt, soweit existent:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^4 + y^4} & \text{falls } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x,y) \neq 0 \\ c & \text{falls } (x,y) = 0, \quad \text{wobei } c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(9 Punkte)

Aufgabe 23:
a) Untersuche, in welchen Punkten die p-Normen

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \|x\|_p$$

mit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ differenzierbar sind.
b) Untersuche, in welchen Punkten die von einem Skalarprodukt induzierten Normen differenzierbar sind, d.h. die Funktionen

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{<x,x>}$$

für ein beliebiges Skalarprodukt $<\cdot,\cdot>$ des $\mathbb{R}^n$. (8 Punkte)

Aufgabe 24:
Für $n \in \mathbb{N}$ ist die *Polarkoordinatenabbildung* definiert durch

$$P_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \ldots \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 \ldots \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\ \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \ldots \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\ \vdots \\ \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\ \sin\varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

a) Finde eine rekursive Darstellung von P_n.
b) Zeige $\|P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\|_2 = |r|$.
c) Zeige, daß P_n differenzierbar ist und daß die Spalten der Jacobimatrix P_n' ein Orthogonalsystem bilden, d.h. daß $D = {P_n'}^T P_n'$ eine Diagonalmatrix ist. Welchen Wert haben die Diagonaleinträge von D?
d) Zeige, daß die Funktionaldeterminante von P_n folgenden Wert hat:

$$\det P_n'(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) = r^{n-1} \prod_{k=2}^{n-1} \cos^{k-1}\varphi_k.$$

Hinweis: Für d) ist c) nützlich. (12 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.