Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 4

Ausgabe: Freitag, den 11. Mai 2001
Abgabe: Freitag, den 18. Mai 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 15:
Bestimme den Definitionsbereich folgender Funktionen und untersuche sie auf Stetigkeit und stetige Fortsetzbarkeit nach $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y^2} \qquad\qquad g(x,y) = \frac{xy}{|x|+y^2}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 16:
a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $E \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f : D \to E$ stetig und bijektiv. Zeige, daß die Umkehrabbildung $f^{-1} : E \to D$ ebenfalls stetig ist.
b) Finde eine nichtkompakte Menge $D \subset \mathbb{R}$, eine Menge $E \subset \mathbb{R}$ und eine stetige und bijektive Funktion $f : D \to E$, deren Umkehrfunktion nicht stetig ist. (10 Punkte)

Aufgabe 17:
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, sei $G = \{(x, f(x))\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ihr Graph. Finde eine möglichst einfache Bedingung an f, die äquivalent zur Abgeschlossenheit von G ist. (10 Punkte)

Aufgabe 18:
Zeige, daß die triviale Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

auf dem $\mathbb{R}^n$ nicht von einer Norm induziert wird, d.h. daß es keine Norm N des $\mathbb{R}^n$ mit $d(x,y) = N(x-y)$ gibt. (5 Punkte)

Aufgabe 19:
Betrachte drei topologische Räume:

$$\begin{array}{rl} X_1 = \mathbb{R} & \text{mit der } \textit{diskreten Topologie:} \\ & \mathscr{T}_1 = \{A \subset \mathbb{R}\} = 2^{\mathbb{R}} = \text{Potenzmenge von } \mathbb{R} \\ X_2 = \mathbb{R} & \text{mit der } \textit{gewöhnlichen Topologie:} \\ & \mathscr{T}_2 = \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A\} \\ X_3 = \mathbb{R} & \text{mit der } \textit{indiskreten Topologie:} \\ & \mathscr{T}_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \end{array}$$

a) Wie sehen die konvergenten Folgen in X_1, X_2 und X_3 jeweils aus?
b) Wie sehen die stetigen Funktionen $f_{ij} : X_i \to X_j$ jeweils aus, d.h. diejenigen Funktionen, die der Bedingung

$$\forall x \in X_i \quad \forall V \in \mathscr{T}_j \text{ mit } f_{ij}(x) \in V \quad \exists U \in \mathscr{T}_i \text{ mit } x \in U : \quad f_{ij}(U) \subset V$$

genügen? (10 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.