Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 3

Ausgabe: Freitag, den 4. Mai 2001
Abgabe: Freitag, den 11. Mai 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 10:
Seien $A \subset \mathbb{R}^m$ und $B \subset \mathbb{R}^n$.
a) Zeige

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}, \qquad (A \times B)^\circ = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B},$$

b) Zeige

$$\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$$

c) Zeige für $m = n$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}, \qquad \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = (A \cap B)^\circ$$

Finde jeweils Mengen A und B, so daß

$$\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}, \qquad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq (A \cup B)^\circ$$

d) Zeige

$$\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}, \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 11:
Finde eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1)$, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
(5 Punkte)

Aufgabe 12:
a) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, und es gelte $K \cap A = \emptyset$. Bezüglich einer beliebigen Norm N des $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathrm{d}(x, y) := N(x-y)$ den Abstand der Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeige:

$$\mathrm{d}(A, K) := \inf\{\mathrm{d}(a, k) : a \in A, k \in K\} > 0$$

b) Stimmt die Aussage auch noch, wenn beide Mengen lediglich als abgeschlossen vorausgesetzt werden? (Beweis bzw. Gegenbeispiel) (12 Punkte)

Aufgabe 13:
Beweise das *Lebesguesche Lemma:*
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\mathfrak{M} = \{M_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es eine Zahl $\lambda > 0$ mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Teilmenge $A \subset K$ mit

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{\|x - y\|_2 : x, y \in A\} < \lambda$$

existiert ein $i \in I$ mit $A \subset M_i$. (15 Punkte)

Aufgabe 14:
Zu $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ und einer Norm N des $\mathbb{R}^n$ sei

$$B_{\varepsilon,N}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - x_0) < \varepsilon\}$$

die ε-Normkugel bzgl. N um x_0. Zeige, daß $B_{\varepsilon,N}(x_0)$ konvex ist. (5 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.