INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 2

Ausgabe: Freitag, den 27. April 2001
Abgabe: Freitag, den 4. Mai 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 5:
a) Sei M eine beliebige Menge. Zeige, daß

$$d(m,n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } m = n \\ 1 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

eine Metrik auf M ist. (Sie heißt die *triviale Metrik*.)
b) Ist

$$d(f,g) := |f(0) - g(0)|$$

eine Metrik auf $C^0([0,1])$?
c) Für welche $a_i \in \mathbb{R}$ ist

$$N(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$?
d) Sind folgende Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Skalarprodukte auf dem $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned} <x,y>_1 &:= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \\ <x,y>_2 &:= 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 \\ <x,y>_3 &:= 2x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2 \\ <x,y>_4 &:= x_1^2y_1 + x_2y_2^2 \end{aligned}$$

(8 Punkte)

Aufgabe 6:
a) Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ stetig differenzierbar und monoton wachsend. Die Ableitung f' sei monoton fallend. Es gelte $f(0) = 0$ und $f|_{\mathbb{R}^+} > 0$. Zeige, daß

$$d(x,y) := f(|x-y|)$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.
b) Zeige, daß insbesondere

$$d(x,y) := \arctan(|x-y|)$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.
c) Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, a_k \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller (nicht notwendigerweise konvergenten) reellen Folgen. Zeige, daß

$$d((a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}$$

konvergiert und eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist. (10 Punkte)

Aufgabe 7:
a) Zeige, daß eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, genau dann von einem Skalarprodukt $<\cdot,\cdot>$ induziert wird (d.h. $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \sqrt{<x,x>}$), wenn sie der *Parallelogrammidentität* genügt:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Hinweis zu „$\Leftarrow$“: Zeige die Identität $<cx,y>= c <x,y>$ zunächst für $c \in \mathbb{N}$, dann für $c \in \mathbb{Q}$ und schließlich für $c \in \mathbb{R}$.
b) Sei ab jetzt $n \geq 2$. Zeige, daß die p-Norm $\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p}$ mit $p \in \mathbb{N}$ genau dann von einem Skalarprodukt induziert wird, wenn $p = 2$ ist. Wie sieht das Skalarprodukt in diesem Fall aus?
c) Zeige, daß die Maximumsnorm $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ nicht von einem Skalarprodukt induziert wird. (12 Punkte)

Aufgabe 8:
a) Welche der folgenden Mengen sind offen und welche abgeschlossen? Beschreibe diese Mengen möglichst einfach in Worten. Skizziere sie von Hand für $n = 3$.

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\} \\
B &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\} \\
C &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < 1\} \\
D &= \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 \leq 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1\} \\
E &= \{x \in \mathbb{R}^n : a \cdot x > 2\} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 9:
Finde für ein $n \in \mathbb{N}$ deiner Wahl eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, so daß die Mengen

$$M,\ \mathring{M},\ \overline{M},\ \overline{\mathring{M}},\ \mathring{\overline{M}},\ \mathring{\overline{\mathring{M}}},\ \overline{\mathring{\overline{M}}}$$

paarweise verschieden sind. (10 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.