Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis II
Sommersemester 2001
Aufgabenblatt 1

Ausgabe: Freitag, den 20. April 2001
Abgabe: Freitag, den 27. April 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 1:
Zeige, daß $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$ genau dann eine Regelfunktion ist, wenn für jedes $x \in (a, b]$ der linksseitige Limes $\lim_{y \nearrow x} f(y)$ und jedes $x \in [a, b)$ der rechtsseitige Limes $\lim_{y \searrow x} f(y)$ existieren.
Erinnerung: f heißt *Regelfunktion*, wenn es eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen $t_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert. (10 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{falls } x \in \{0, \pi\} \\ 1 & \text{falls } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Berechne die Fourierkoeffizienten von f:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}_0, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig?
Konvergiert die Fourierreihe in der Hilbertnorm?
Konvergiert die Fourierreihe punktweise? (ohne Beweis) (10 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, 2π-periodisch und stückweise stetig differenzierbar, d.h. daß es eine Zerlegung $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = \pi$ mit $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß f auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ stetig differenzierbar ist.
a) Leite eine Beziehung zwischen den Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad c'_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

der Funktion f und ihrer Ableitung her.
b) Zeige, daß

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k$$

absolut konvergiert.
c) Zeige, daß die Fourierreihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

gleichmäßig und absolut gegen f konvergiert. (10 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall.
a) Zeige, daß jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ durch stetige und stückweise lineare Funktionen gleichmäßig approximiert werden kann, d.h. daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige und stückweise lineare Funktion $\ell : I \to \mathbb{R}$ mit $\|f - \ell\|_I < \varepsilon$ gibt.
b) Zeige, daß sich die Funktionen $f_k(x) = e^{ikx}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ auf I gleichmäßig durch Polynome appromimieren lassen.
Hinweis: Die Exponentialfunktion ist durch eine Potenzreihe definiert.
c) Beweise mit Hilfe von a), b) und Aufgabe 3 den *Weierstraßschen Approximationssatz*[1]*:*
Jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ läßt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren. (10 Punkte)

Programmieraufgabe 1:
a) Schreibe zwei Prozeduren $\texttt{sincoeff}(k, f)$ und $\texttt{coscoeff}(k, f)$, die zu $k \in \mathbb{N}_0$ und $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ die Fourierkoeffizienten

$$\texttt{coscoeff}(k, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \texttt{sincoeff}(k, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x,$$

berechnet.
b) Stelle die Fourierkoeffizienten bis zu einem festen $K \in \mathbb{N}$ graphisch dar.
c) Stelle die Funktion f und die abgeschnittene Fourierreihe

$$\frac{\texttt{coscoeff}(0, f)}{2} + \sum_{k=1}^{K} \texttt{coscoeff}(k, f)\cos(kx) + \sum_{k=1}^{K} \texttt{sincoeff}(k, f)\sin(kx)$$

graphisch dar.
d) Teste a)-c) anhand der Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ f(x) &= \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und der Werte $K \in \{1, 2, 3, 5, 10, 100\}$. Vergleiche f mit der abgeschnittenen Fourierreihe.
(10 Punkte)

Vorstellung der Lösungen:
Zeit: In der Woche vom 7.5. bis 11.5.2001, genauer Termin nach Vereinbarung.
Ort: CIP-Pool, Wegelerstr. 6, Zimmer 114.
Die Bearbeitung erfolgt (wie gehabt) mit Maple oder einem anderen Computeralgebrasystem. Die Programmieraufgabe kann in Gruppen von bis zu drei Studenten bearbeitet und vorgestellt werden.

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis2 verfügbar.

[1] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815-1897