Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 14

Ausgabe: Freitag, den 2. Februar 2001
Abgabe: Freitag, den 9. Februar 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 63:
Zeige folgende Variante des Mittelwertsatzes der Integralrechnung:
Sei $a < b$, sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, monoton fallend und nichtnegativ und sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Partielle Integration, Zwischenwertsatz. (4 Punkte)

Aufgabe 64:
a) Zeige, daß das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

existiert. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß mit jeder Riemann-integrierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auch $|f|$ Riemann-integrierbar ist (Satz 5.8). Zeige anhand des Beispiels

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x,$$

daß dies für uneigentliche Integrale i.allg. nicht gilt.
b) Zeige, daß

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

nicht existiert. Zeige, daß jedoch für alle $c \in \mathbb{R}^+$ der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0}\left(\int_{-1}^{-c\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)$$

existiert und berechne ihn. (4 Punkte)
Bemerkung: Koppelt man also beide Grenzprozesse, so läßt sich (in manchen Fällen) Konvergenz erzielen, allerdings kann der Grenzwert wie gesehen vom Verhältnis c der Geschwindigkeiten abhängen. Im Fall $c = 1$ spricht man von einem *Cauchyschen Hauptwert.*

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.