Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 13

<u>Ausgabe:</u> Freitag, den 26. Januar 2001
<u>Abgabe:</u> Freitag, den 2. Februar 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 57:
Zeige, daß für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$ (4 Punkte)

Aufgabe 58:
Untersuche auf Integrierbarkeit und berechne ggf. das Integral über $[0;1]$:

$$f(x) = \begin{cases} (\min\{n \in \mathbb{N} : nx \in \mathbb{Z}\})^{-1} & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$ (4 Punkte)

Aufgabe 59:
a) Sei $a < b$, sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige:

$$\left(f \geq 0 \wedge \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \right) \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

b) Gilt a) auch noch, wenn die Voraussetzung der Stetigkeit entfällt? (4 Punkte)

Aufgabe 60:
Zeige, daß die Umkehrung von Satz 5.7 der Vorlesung gilt:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gebe ein $C \in \mathbb{R}$, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ existiert, so daß für jede Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ der Feinheit $\leq \eta$ und jede Wahl von Stützstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt:

$$\left| C - \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \right| \leq \varepsilon.$$

Dann ist f über $[a,b]$ Riemann-integrierbar und hat das Integral C. (4 Punkte)
Damit ist gezeigt, daß die Definition der Riemann-Integrierbarkeit mittels Ober- und Unterintegrale äquivalent ist zur Konvergenz der Riemannsummen im o.g. Sinn.

Aufgabe 61:
Berechne folgende Integrale mit Hilfe der Ober- und Unterintegrale:

a) $$\int_a^b x^3 \mathrm{d}x \qquad \text{mit } a < b,$$ (1 Punkt)

b) $$\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \text{mit } b > 1.$$ (2 Punkte)

Hinweis zu b): Verwende eine Zerlegung der Form $1 = q^0 < q^1 < q^2 < \ldots < q^N = b$.

Aufgabe 62:
Berechne folgende Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

a) $$\int_a^b \frac{(x^2+4)^2+x^2-2x}{(x^2+4)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x$$

b) $$\int_a^b \frac{x^5+x^2+1}{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x$$

c) $$\int_a^b \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

Berechne folgende Integrale mittels partieller Integration:

d) $$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

e) $$\int_a^b x^2 e^x\,\mathrm{d}x$$

f) $$\int_a^b \ln|x|\,\mathrm{d}x$$

g) $$\int_a^b \arctan x\,\mathrm{d}x$$

Berechne folgende Integrale mittels Substitution:

h) $$\int_a^b x^{-3}e^{x^{-2}}\,\mathrm{d}x$$

i) $$\int_a^b \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

j) $$\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Welchen Flächeninhalt hat ein Kreis mit Radius r?
Wie müssen die Integrationsgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$ ggf. eingeschränkt werden? (10 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.