INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 12

Ausgabe: Freitag, den 19. Januar 2001
Abgabe: Freitag, den 26. Januar 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 53:
a) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige, daß f stetig ist.
b) Ist jede konvexe Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig? (4 Punkte)

Aufgabe 54:
Zeige, daß

$$V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \text{ zweimal differenzierbar}, \quad f'' + f = 0\}$$

ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Die Funktionen sin und cos bilden eine Basis von V. Jedes $f \in V$ ist unendlich oft differenzierbar.
Hinweis: Zu $f \in V$ betrachte die Funktion

$$g(x) := f(x) - f(0)\cos(x) - f'(0)\sin(x)$$

und zeige $({g'}^2 + g^2)' = 0$. (4 Punkte)

Aufgabe 55:
Bestimme mit Hilfe der Regel von de L'Hôspital[1]:

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x},$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \ln \cos x}{x^2},$$

c) $$\lim_{x \searrow 0} (\tan x)^{\sin x}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 56:
a) Sei I ein Intervall, seien $f_\nu : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, $\nu \in \mathbb{N}$. Die Funktionenreihe $f := \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ konvergiere in I. Weiterhin konvergiere $\sum_{\nu=1}^{\infty} f'_\nu$ gleichmäßig in I. Zeige, daß dann f differenzierbar ist und

$$f' = \sum_{\nu=1}^{\infty} f'_\nu,$$

d.h. Summation und Differentiation vertauschen.
Hinweis: Nutze Aufgabe 29 von Aufgabenblatt 7.
b) Sei nun $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Zeige, daß f in $(-R, R)$ differenzierbar ist und dort gilt:

$$f'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1}.$$

Potenzreihen dürfen also innerhalb ihres Konvergenzkreises gliedweise differenziert werden.
(6 Punkte)

[1] Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôspital, 1661-1704

Programmieraufgabe 4:
Computeralgebrasysteme ermöglichen die symbolische Manipulation von mathematischen Ausdrücken, z.B. das Auflösen einiger Gleichungen oder die Differentiation von Funktionen. Dies geschieht mathematisch exakt, d.h. ohne Rundungen. Damit kann man sich oft einige lästige und fehleranfällige Rechnungen vom Computer abnehmen lassen.
a) Berechne die Ableitungen von drei Funktionen aus Aufgabe 48 (Blatt 11).
b) Bestimme die Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = (-x^3 + 2x^2 + 2x)e^{-x}.$$

In welchen Punkten ist f konvex und in welchen konkav? Plotte f, f' und f'' mit der Abszisse von -1 bis 8 und der Ordinate von -3 bis 3 und überprüfe daran die Ergebnisse der Kurvendiskussion.
(10 Punkte)

<u>Vorstellung der Lösungen:</u>
Zeit: In der Woche vom 29.1. bis 2.2.2001, genauer Termin nach Vereinbarung.
Ort: CIP-Pool, Wegelerstr. 6, Zimmer 114.
Die Bearbeitung erfolgt (wie gehabt) mit Maple oder einem anderen Computeralgebrasystem. Die Programmieraufgabe kann in Gruppen von bis zu drei Studenten bearbeitet und vorgestellt werden.

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.