Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Abt. Wissenschaftliches Rechnen und Numerische Simulation
Prof. Dr. M. Griebel, M. Arndt

Analysis I
Wintersemester 2000/2001
Aufgabenblatt 11

Ausgabe: Freitag, den 12. Januar 2001
Abgabe: Freitag, den 19. Januar 2001, 10:00-10:10

Aufgabe 48:
Berechne die Ableitungen folgender Funktionen $f(x)$:

a) $\sqrt{e^{\sin\sqrt{x}}}$ d) $\sqrt{e^{x^4+x^2+1}}$ g) $x^{x^x} = x^{(x^x)}$ h) $(x^x)^x$

b) $\arcsin(\cos 3x)\sin x$ e) $6x^4 e^{8x-2}$ i) $(\sin x)^{\cos x}$

c) $\ln(\ln(\ln x)) - \ln\pi$ f) $\operatorname{Arcosh} x$ j) $\dfrac{\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{1+\arctan x}}{5x^2\sin x\cot^2 x}$ auf $(0;\frac{\pi}{2})$

(Manchmal ist die logarithmische Ableitung hilfreich.) (5 Punkte)

Aufgabe 49:
Seien
$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\quad g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right),\quad h(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\quad \text{für } x \neq 0,\quad g(0) = h(0) = 0.$$
a) Zeige, daß f nicht stetig nach 0 fortsetzbar ist.
b) Zeige, daß g stetig in 0, aber nicht differenzierbar in 0 ist.
c) Zeige, daß h differenzierbar in 0, aber nicht stetig differenzierbar in 0 ist. (4 Punkte)

Aufgabe 50:
a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, daß dann gilt:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$
b) Zeige durch Angabe eines Gegenbeispiels, daß aus der Existenz des obigen Grenzwertes jedoch nicht folgt, daß f in x stetig ist (und erst recht nicht differenzierbar). (4 Punkte)

Aufgabe 51:
Sei $f : [0;1] \to [0;1]$ stetig, f(0)=0, f(1)=1. Es gebe ein $m \in \mathbb{N}$, so daß
$$f^m := \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{m\text{-mal}} = \mathrm{id}_{[0;1]}$$
ist. Zeige, daß dann $f = \mathrm{id}_{[0;1]}$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 52:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, f habe eine Nullstelle, und es gelte $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ rekursiv mit Hilfe des *Newtonverfahrens* bestimmt:
$$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$
Zeige, daß das Newtonverfahren *lokal quadratisch* gegen eine Nullstelle von f konvergiert, d.h. falls der Startwert x_0 nahe genug an einer Nullstelle ξ liegt, so konvergiert die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen ξ und
$$\exists\, c \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{N} : \quad |x_{i+1} - \xi| \leq c|x_i - \xi|^2.$$
Hinweis: Taylorentwicklung von f um x_i. (4 Punkte)

Die Aufgabenblätter sind auch unter http://wissrech.iam.uni-bonn.de/lehre/Analysis1_WS00 verfügbar.